Stabilität gemischt-ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme

Überblick und offene Fragen

Stefan Vigerske

8.2.2006

Forschungsseminar Numerik stochastischer Modelle
Humboldt-Universität zu Berlin

Das Problem

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß}\ & A_x x + A_y y \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^s \end{aligned} \qquad \text{(MIP)}$$

$A := (A_x, A_y) \in \mathbb{Q}^{n \times m},\ c := (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$

zulässige Menge LP: $M(b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \,|A_x x + A_y y \leq b\}$

zulässige Menge MIP: $G(b) := \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \,|A_x x + A_y y \leq b\right\}$

Optimalwertfunktion: $\varphi(b, c) := \min \left\{c_x^T x + c_y^T y \,|(x, y) \in G(b)\right\}$

Optimalmengenfkt.: $\psi(b, c) := \left\{(x, y) \in G(b) \,\middle|\, c^T (x, y) = \varphi(b, c)\right\}$

Rezessionskegel: $M(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \,|A_x x + A_y y \leq 0\}$

zulässige Parametermenge LP: $\tilde{B} := \{b \in \mathbb{R}^m \,|M(b) \neq \emptyset\}$

zulässige Parametermenge MIP: $B := \{b \in \mathbb{R}^m \,|G(b) \neq \emptyset\}$

Übersicht

1. Stabilität
   - Qualitative Stabilität
   - Quantitative Stabilität

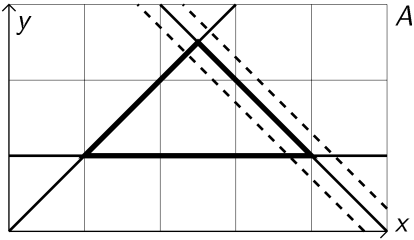
2. Die konvexe Hülle der zulässigen Menge eines MIPs
   - Rein-ganzzahlige lineare Programme
   - MIPs mit beschränkten ganzzahligen Variablen
   - Gemischt-ganzzahlige lineare Programme

Gliederung

Literaturübersicht

- Blair, Jeroslow: The Value Function of a Mixed Integer Program I (1977)
- Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer: Non-Linear Parametric Optimization (1982)
- Bank, Mandel: Parametric Integer Optimization (1988)
- Bank, Hansel: Stability of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems (1984)
- Bank, Mandel: Quantitative Stability of (Mixed-)Integer Linear Optimization Problems
- Schultz: Rates of Convergence in Stochastic Programs with Complete Integer Recourse (1996)

Stabilität der zulässigen Menge eines LPs



$A_x x + A_y y \leq b$

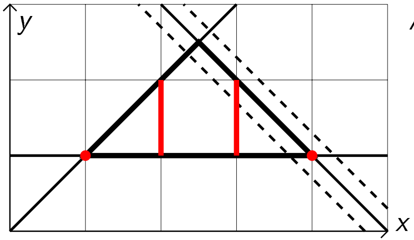
Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

Es existiert eine stetige Abbildung $C : \tilde{B} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, *wobei* $C(b)$ *kompakte, konvexe Polyeder sind, so daß für alle* $b \in \tilde{B}$:

$$M(b) = M(0) + C(b).$$

Korollar: $M : \tilde{B} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *ist stetig.*

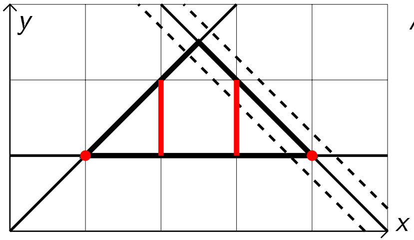
Stabilität der zulässigen Menge eines MIPs



$$A_x x + A_y y \leq b$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

Stabilität der zulässigen Menge eines MIPs



$A_x x + A_y y \leq b$

$x \in \mathbb{Z}$

Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

Es existiert eine oberhalbstetige kompaktwertige Abbildung $K : B \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, so daß für alle $b \in B$:

$$G(b) = G(0) + K(b).$$

Def.: $\Gamma : \Lambda \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ oberhalbstetig in λ^0, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:
$\forall \lambda \in U_\delta(\lambda^0)$: $\Gamma(\lambda) \subseteq U_\varepsilon(\Gamma(\lambda^0))$.

Stetigkeit der zulässigen Menge eines MIPs

Für $b^0 \in B$ sei

$$B^*\left(b^0\right) := \left\{ b \in B \,\middle|\, \Pr_x G\left(b\right) = \Pr_x G\left(b^0\right) \right\}.$$

Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

Sei $b^0 \in B$ fixiert. Die Einschränkung von $G\left(b\right)$ auf $B^*(b^0)$ ist stetig.

Stetigkeit der zulässigen Menge eines MIPs

Für $b^0 \in B$ sei

$$B^*\left(b^0\right) := \left\{ b \in B \,\middle|\, \Pr_x G\left(b\right) = \Pr_x G\left(b^0\right) \right\}.$$

Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

Sei $b^0 \in B$ fixiert. Die Einschränkung von $G\left(b\right)$ auf $B^*(b^0)$ ist stetig.

Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

Für $b^0 \in B$ mit $\Pr_x G\left(b^0\right) \neq \mathbb{Z}^s$ existiert ein $\vartheta^0 \in B$ und eine endliche Menge $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^s \setminus \Pr_x G\left(b^0\right)$, so daß

$$B^*\left(b^0\right) = \left(\vartheta^0 + T\right) \setminus \bigcap_{x \in \Omega} \left(A_x x + T\right)$$

wobei $T := \{\vartheta \in \mathbb{R}^m \,|\exists y \in \mathbb{R}^{n-s} : \vartheta \geq A_y y\}$.

Stetigkeit der Optimalwert- und Lösungsmengefunktion

Für $b^0 \in B$ sei

$$B^*\left(b^0\right) := \left\{ b \in B \,\middle|\, \Pr_x G\left(b\right) = \Pr_x G\left(b^0\right) \right\}.$$

Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

$\varphi\left(b, c\right)$ ist unterhalbstetig für $\left(b, c\right)$ mit $b \in B$ und $\varphi\left(b, c\right) > -\infty$.

Theorem (Bank, Guddat, Klatte, Kummer, Tammer 1982)

Sei $b^0 \in B$. $\varphi\left(b, c\right)$ und $\psi\left(b, c\right)$ sind stetig bzw. oberhalbstetig für $b \in B^*\left(b^0\right)$ und $c \in -M\left(0\right)^p$.

$M\left(0\right)^p$ ist der polare Kegel zu $M\left(0\right)$.

Quasi-Lipschitzstetigkeit der zulässigen Menge

Definition (quasi-Lipschitz)

$\Gamma : \Lambda \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ ist quasi-Lipschitz auf Λ, wenn Konstanten ρ und τ existieren, so daß

$$d\left(\Gamma\left(\lambda\right), \Gamma\left(\lambda'\right)\right) \leq \rho \left|\lambda - \lambda'\right| + \tau \qquad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda.$$

$d\left(\right)$ ist der Hausdorff-Abstand $d\left(C, D\right) := \inf\left\{\varepsilon \,\middle|\, C \subseteq U_\varepsilon D, D \subseteq U_\varepsilon C\right\}$.

Theorem (Bank, Mandel 1988)

Es existiert eine kompaktwertige quasi-Lipschitz Funktion $K^* : B \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, so daß für alle $b \in B$

$$G\left(b\right) = G\left(0\right) + K^*\left(b\right).$$

Theorem (Blair, Jeroslow 1977; Bank, Mandel 1988)

$G\left(b\right)$ ist quasi-Lipschitz auf B.

Quasi-Lipschitzstetigkeit bei fester Zielfunktion

Sei $c \in -M(0)^p$ fixiert.

Theorem (Bank, Mandel 1988)

Es existiert eine kompaktwertige quasi-Lipschitz Funktion $\hat{K} : B \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, *so daß für alle* $b \in B$

$$\psi(b, c) = \hat{G}(0) + \hat{K}(b)$$

mit $\hat{G}(0) = \left\{(x, y) \in G(0) \,\middle|\, c^T(x, y) \leq 0\right\}$.

Theorem (Blair, Jeroslow 1977; Bank, Mandel 1988)

$\psi(b, c)$ *und* $\varphi(b, c)$ *sind quasi-Lipschitz auf* B.

Lipschitzstetigkeit bei fester Zielfunktion

Sei $c \in -M(0)^p$ fixiert.

$$\begin{array}{rcl} \min\ c_x^T x + c_y^T y & = & \min\ c_x^T x + \Phi(b - A_x x) \\ \text{so daß } A_x x + A_y y \leq b & & \text{so daß } x \in \Pr_x G(b) \end{array}$$

wobei

$$\Phi(\tilde{b}) := \min\left\{ c_y^T y \,\middle|\, A_y y \leq \tilde{b} \right\}.$$

Es existieren endlich viele Matrizen D_i (bestimmt durch A_y), so daß

$$\Phi(\tilde{b}) = \max_i c_y^T D_i \tilde{b} \qquad \forall \tilde{b} : -\infty < \Phi(\tilde{b}) < \infty$$

$\Phi(\tilde{b})$ ist Lipschitzstetig mit Konstante $|c_y|\, L$, wobei L nur von A_y abhängt

Lipschitzstetigkeit bei fester Zielfunktion

Sei $c \in -M(0)^p$ fixiert.

$$\begin{array}{c} \min\; c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß } A_x x + A_y y \leq b \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} \min\; c_x^T x + \Phi\left(b - A_x x\right) \\ \text{so daß } x \in \Pr_x G\left(b\right) \end{array}$$

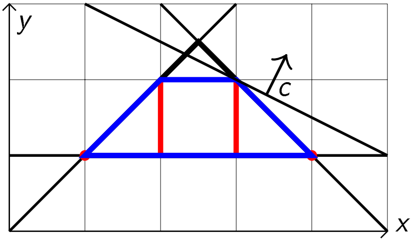
- $\Phi(\tilde{b})$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $|c_y|\, L$
- $\varphi(\cdot, c)$ ist das Minimum abzählbar vieler stetiger, stückweise linearer Funktionen

Theorem (Schultz 1996)

Sei $b \in B$. Dann ist $\varphi(\cdot, c)$ Lipschitzstetig auf $B^*(b)$ mit Konstante $L\,|c_y|$, wobei L nicht von b (bzw. $B^*(b)$) oder c abhängt.

Lipschitzstetigkeit bei fester rechter Seite

Sei $b \in B$ fixiert.

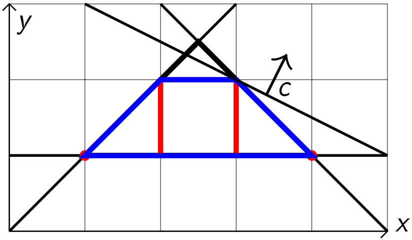


$$\begin{aligned} & \min\ c^T(x,y) \\ & \text{so daß } (x,y) \in G(b) \end{aligned}$$

$$= \quad \begin{aligned} & \min\ c^T(x,y) \\ & \text{so daß } (x,y) \in \operatorname{conv} G(b) \end{aligned}$$

Lipschitzstetigkeit bei fester rechter Seite

Sei $b \in B$ fixiert.



$$\begin{aligned} & \min\ c^T(x,y) \\ & \text{so daß } (x,y) \in G(b) \\ = \quad & \min\ c^T(x,y) \\ & \text{so daß } (x,y) \in \operatorname{conv} G(b) \end{aligned}$$

Theorem (Bank, Mandel 1988)

$\operatorname{conv} G(b) = M(0) + \operatorname{conv} K(b)$ *ist ein konvexer Polyeder für* $b \in \mathbb{Q}^m$.

Corollary

Sei $b \in B$ *fixiert.* $\varphi(b,\cdot)$ *ist Lipschitzstetig auf* $-M(0)^p$.

Lipschitzstetigkeit bei fester rechter Seite und beschränkten ganzzahligen Variablen

Sei $b \in B$ fixiert.

$$\begin{array}{rlcrl} & \min\ c_x^T x + c_y^T y & = & & \min_x\ c_x^T x + \Phi\left(c_y, b - A_x x\right) \\ \text{so daß} & A_x x + A_y y \leq b & & \text{so daß} & x \in \Pr_x G\left(b\right) \\ & 0 \leq x \leq \bar{x}, \quad x \in \mathbb{Z}^s & & & 0 \leq x \leq \bar{x}, \quad x \in \mathbb{Z}^s \end{array}$$

wobei $\Phi(c_y, \tilde{b}) := \min\left\{ c_y^T y \,\middle|\, A_y y \leq \tilde{b} \right\}.$

Lipschitzstetigkeit bei fester rechter Seite und beschränkten ganzzahligen Variablen

Sei $b \in B$ fixiert.

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y & = \quad & \min_x\ c_x^T x + \Phi\left(c_y, b - A_x x\right) \\ \text{so daß}\ & A_x x + A_y y \leq b & & \text{so daß}\ x \in \Pr_x G\left(b\right) \\ & 0 \leq x \leq \bar{x}, \quad x \in \mathbb{Z}^s & & 0 \leq x \leq \bar{x}, \quad x \in \mathbb{Z}^s \end{aligned}$$

wobei $\Phi(c_y, \tilde{b}) := \min \left\{ c_y^T y \,\middle|\, A_y y \leq \tilde{b} \right\}.$

$c, c' \in -M\left(0\right)^p$; $(x, y) \in \psi\left(b, c\right)$ mit y Basislösung für $\Phi(c_y, b - A_x x)$

$$\varphi\left(b, c'\right) - \varphi\left(b, c\right) \leq \left(c'_x - c_x\right)^T x + {c'_y}^T y - c_y^T y,$$

und $|y| \leq L\,|b - A_x x| \leq L\left(|b| + |A_x|\,|\bar{x}|\right).$

D.h. $c \mapsto \varphi\left(b, c\right)$ ist Lipschitzstetig mit Konstante $L_1\,|b| + L_2\,|\bar{x}|$.

Lipschitzstetigkeit bzgl. Zielfunktion und rechter Seite?

Seien $b \in B$, $b' \in B^*(b)$, $c, c' \in -M(0)^p$.

Wir wissen:

$$\begin{aligned} \left|\varphi(b,c) - \varphi(b',c')\right| &\leq \left|\varphi(b,c) - \varphi(b',c)\right| + \left|\varphi(b',c) - \varphi(b',c')\right| \\ &\leq L_1(c)\left|b - b'\right| + L_2(b')\left|c - c'\right| \end{aligned}$$

- $L_1(c) \leq |c_y| L$, wobei L nur von A_y abhängt.
- Falls x beschränkt ist, so ist $L_2(b') \leq L_{2,1}|b| + L_{2,2}|\bar{x}|$, wobei $L_{2,1}$ und $L_{2,2}$ nur von A abhängen.

Lipschitzstetigkeit bzgl. Zielfunktion und rechter Seite?

Seien $b \in B$, $b' \in B^*(b)$, $c, c' \in -M(0)^p$.

Wir wissen:

$$\begin{aligned}\left|\varphi(b,c) - \varphi(b',c')\right| &\leq \left|\varphi(b,c) - \varphi(b',c)\right| + \left|\varphi(b',c) - \varphi(b',c')\right| \\ &\leq L_1(c)\left|b - b'\right| + L_2(b')\left|c - c'\right|\end{aligned}$$

- $L_1(c) \leq |c_y| L$, wobei L nur von A_y abhängt.
- Falls x beschränkt ist, so ist $L_2(b') \leq L_{2,1}|b| + L_{2,2}|\bar{x}|$, wobei $L_{2,1}$ und $L_{2,2}$ nur von A abhängen.

Frage

Ist $\varphi(b,c)$ Lipschitzstetig in beiden Argumenten gemeinsam?

Gliederung

Literaturübersicht

Rein-ganzzahlige lineare Programme:

- Wolsey: The *b*-Hull of an Integer Program (1981)
- Cook, Gerards, Schrijver, Tardos: Sensitivity Theorems in Integer Linear Programming (1986)

Lift and Project:

- Balas: Disjunctive programming: Properties of the Convex Hull of Feasible Points (1974, 1998)
- Balas: Lift-and-Project for Mixed 0-1 Programming: Recent Progress (2002)
- Balas: A precise correspondence between Lift-and-Project Cuts, simple Disjunctive Cuts, and Mixed Integer Gomory Cuts for 0-1 Programming (2003)
- Sherali, Adams: A Hierarchy of Relaxations between the Continuous and Convex Hull Representation for Zero-One Programming Problems (1990)

Literaturübersicht

weitere Cuts:

- Blair: Minimal Inequalities for Mixed Integer Programs (1978)
- Jeroslow: Minimal Inequalities (1979)
- Nemhauser, Wolsey: A Recursive Procedure to Generate all Cuts for 0-1 Mixed Integer Programs (1990)
- Cook, Kannan, Schrijver: Chvátal Closures for Mixed Integer Programming Problems (1990)

Übersichten:

- Nemhauser, Wolsey: Integer and Combinatorial Optimization (1999)
- Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming (1999)
- Marchand, Martin, Weismantel, Wolsey: Cutting Planes in Integer and Mixed Integer Programming (2001)

Rein-ganzzahlige lineare Programme

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{so daß } & Ax \le b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{IP}$$

Theorem (Wolsey 1981; Cook, Gerards, Schrijver, Tardos 1986)

Habe A nur ganzzahlige Einträge. Es existiert eine Matrix D, so daß für jeden Vektor $b \in B$ ein Vektor d_b existiert mit

$$\operatorname{conv} G(b) = \operatorname{conv}\left\{x \in \mathbb{Z}^n \,\middle|\, Ax \le b\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Dx \le d_b\right\}.$$

D hat ganzzahlige Einträge mit Absolutwert höchstens $n^{2n}\Delta(A)^n$,
$\Delta(A) := \max\left\{|\det Q| \,\middle|\, Q \text{ quadratische Submatrix von } A\right\}$

$$\text{Zeilen von } D = \left\{y^T A \,\middle|\, y^T A \in \mathbb{Z}^n,\ y \ge 0,\ \left\|y^T A\right\|_\infty \le n^{2n}\Delta(A)^n\right\}$$

Übertragung auf MIPs ?

Theorem (Cook, Gerards, Schrijver, Tardos 1986)

Habe A nur ganzzahlige Einträge. Es existiert eine Matrix $D = (D_x, D_y)$, so daß für jeden ganzzahligen Vektor $b \in B$ ein Vektor d_b existiert mit

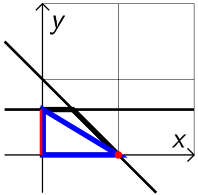
$$\operatorname{conv} G\,(b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \,|D_x x + D_y y \leq d_b\}\,.$$

D hat ganzzahlige Einträge mit Absolutwert $\leq n^{2n}\Delta\,(A_y)^{2n}\,\Delta\,(A)^n$.

Beispiel:

$$x, y \geq 0 \qquad x + y \leq 1 \qquad y \leq \alpha \qquad x \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{conv} G\,(\alpha)$ hat $x + (1/\alpha)\,y \leq 1$ als Seite, $\alpha \in (0, 1)$.



Disjunctive Programming

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_x^T x + c_y^T y \\
\text{so daß}\ & A_x x + A_y y \leq b \\
& x, y \geq 0 \\
& x \leq \bar{x}, \quad x \in \mathbb{Z}^s
\end{aligned}
\qquad \text{(MIP')}
$$

Sei $\{d^h \,|\, h \in Q\} := \{x \in \mathbb{Z}^s \,|\, 0 \leq x \leq \bar{x}\}$ mit Q endlich.

Disjunctive Programming Formulierung von (MIP'):

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_x^T x + c_y^T y \\
\text{so daß}\ & \bigvee_{h \in Q} \left\{ \begin{array}{l} A_x x + A_y y \leq b \\ x, y \geq 0 \\ x = d^h \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Lifting

$$\min\ c_x^T x + c_y^T y \qquad \text{so daß} \bigvee_{h\in Q} \left\{ \begin{array}{l} A_x x + A_y y \leq b \\ x, y \geq 0 \\ x = d^h \end{array} \right\}$$

Theorem (Balas 1974)

Für $b \in B$ und $c \in -M(0)^p$ ist

$$\begin{aligned} \varphi(b,c) \quad = \quad & \min \sum_{h\in Q} c_x^T \xi_x^h + c_y^T \xi_y^h & & \\ & \text{s.d. } A_x \xi_x^h + A_y \xi_y^h - b\xi_0^h \leq 0 & h \in Q & \qquad \text{(LMIP)} \\ & \xi^h \geq 0 & h \in Q & \\ & \xi_x^h - d^h \xi_0^h = 0 & h \in Q & \\ & \sum_{h\in Q} \xi_0^h = 1 & & \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Ecken der Polyeder

$$\min\ c_x^T x + c_y^T y$$

$$\text{s.d.}\ \bigvee_{h\in Q} \underbrace{\left\{\begin{array}{l} A_x x + A_y y \le b \\ x, y \ge 0 \\ x = d^h \end{array}\right\}}_{M_h}$$

$$\min\ \sum_{h\in Q} c_x^T \xi_x^h + c_y^T \xi_y^h$$

$$\text{s.d.}\ \underbrace{\begin{array}{ll} A_x\xi_x^h + A_y\xi_y^h - b\xi_0^h \le 0 & h \in Q \\ \xi^h \ge 0,\ \xi_x^h - d^h\xi_0^h = 0 & h \in Q \\ \sum_{h\in Q} \xi_0^h = 1 & \end{array}}_{F}$$

Theorem (Balas 1974)

$b \in B$, $c \in -M(0)^p$. (MIP') und (LMIP) äquivalent in folgendem Sinn:

1. $(x, y) \in \operatorname{vert}\operatorname{conv} G(b) \Rightarrow \exists k \in Q$: $\xi \in \operatorname{vert} F$ *wobei* $\xi^k = (x, y, 1)$ *und* $\xi^h = 0,\ h \in Q \setminus \{k\}$
2. $\xi \in \operatorname{vert} F \Rightarrow \exists k \in Q$: $\xi_0^k = 1$, $\xi^{\neq k} = 0$, $(\xi_x^k, \xi_y^k) \in \operatorname{vert} M_k$
3. (x, y) *Lösung v. (MIP')* $\Leftrightarrow \xi$ *definiert wie in (1) ist Lösung v. (LMIP)*

Lift and Project Cuts

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß}\ & A_x x + A_y y \le b \\ & x, y \ge 0 \\ & x \in \{0,1\}^s \end{aligned} \tag{0-1 MIP}$$

Sei $x \le \mathbf{1}$ in $A(x,y) \le b$ enthalten.

Wähle ein $k \in \{1,\ldots,s\}$ und betrachte das Disjunctive Program

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß}\ & \left\{ \begin{array}{l} A_x x + A_y y \le b \\ x, y \ge 0 \\ x_k \le 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} A_x x + A_y y \le b \\ x, y \ge 0 \\ x_k \ge 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Lift and Project Cuts

$$\min c_x^T x + c_y^T y \qquad k \in \{1, \ldots, s\}$$

$$\text{so daß} \left\{ \begin{array}{l} A_x x + A_y y \leq b \\ x, y \geq 0 \\ x_k \leq 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} A_x x + A_y y \leq b \\ x, y \geq 0 \\ x_k \geq 1 \end{array} \right\}$$

Ein Lift and Project Cut $\alpha^T(x, y) \geq \beta$ ist gegeben durch Basislösung von

$$\begin{aligned} \alpha + u^T A + u_0 e_k &\geq 0 & \beta + u^T b &= 0 \\ \alpha + v^T A - v_0 e_k &\geq 0 & \beta + v^T b - v_0 &= 0 \\ u, u_0, v, v_0 &\geq 0 & u^T \mathbf{1} + u_0 + v^T \mathbf{1} + v_0 &= 1 \end{aligned}$$

$P_k := \{(x, y) \in P \,|\, (x, y) \text{ erfüllt alle Lift and Project Cuts bzgl. } x_k\}$

Theorem (Balas 1974)

$M(b)_{i_1, i_2, \ldots, i_r} = \operatorname{conv} \{(x, y) \in M(b) \,|\, x_{i_h} \in \{0, 1\}, h = 1, \ldots, r\}$.
$M(b)_{1, \ldots, s} = \operatorname{conv} G(b)$.

Gomory's Mixed-Integer Cuts

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß}\ & A_x x + A_y y = b \\ & x, y \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^s \end{aligned} \qquad \text{(MIP'')}$$

- $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ Basis von A, $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$

$$z = (x, y) \in G(b) \qquad \Rightarrow \qquad z_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N z_N$$

- Sei $i \in \{1, \ldots, s\} \cap B$ fixiert. $\bar{a}_j$ (i, j)-te Eintrag von $A_B^{-1} A_N$, $\bar{b}$ i-te Eintrag von $A_B^{-1} b$. $f_0 = f(\bar{b})$ mit $f(\alpha) := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

$$z_i \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j \in N} \bar{a}_j z_j = f_0 + k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

Gomory's Mixed-Integer Cuts

- $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ Basis von A, $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$

$$z = (x, y) \in G(b) \qquad \Rightarrow \qquad z_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N z_N$$

- Sei $i \in \{1, \ldots, s\} \cap B$ fixiert. $\bar{a}_j$ (i, j)-te Eintrag von $A_B^{-1} A_N$, $\bar{b}$ i-te Eintrag von $A_B^{-1} b$. $f_0 := f\left(\bar{b}\right)$ mit $f(\alpha) := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

$$z_i \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j \in N} \bar{a}_j z_j = f_0 + k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

≥ 0 | < 0

$$\boxed{k \geq 0, \quad \sum_{j \in N : \bar{a}_j \geq 0} \bar{a}_j z_j \geq f_0} \qquad \boxed{k \leq -1, \quad \sum_{j \in N : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j z_j \leq f_0 - 1}$$

Gomory's Mixed-Integer Cuts

- $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ Basis von A, $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$

$$z = (x, y) \in G(b) \qquad \Rightarrow \qquad z_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N z_N$$

- Sei $i \in \{1, \ldots, s\} \cap B$ fixiert. $\bar{a}_j$ (i,j)-te Eintrag von $A_B^{-1} A_N$, $\bar{b}$ i-te Eintrag von $A_B^{-1} b$. $f_0 := f\left(\bar{b}\right)$ mit $f(\alpha) := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

$$z_i \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j \in N} \bar{a}_j z_j = f_0 + k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

≥ 0 $\qquad$ < 0

$$\boxed{k \geq 0, \qquad \sum_{j \in N : \bar{a}_j \geq 0} \bar{a}_j z_j \geq f_0} \qquad \boxed{k \leq -1, \qquad -\frac{f_0}{1 - f_0} \sum_{j \in N : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j z_j \geq f_0}$$

Gomory's Mixed-Integer Cuts

- $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ Basis von A, $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

$$z = (x, y) \in G(b) \qquad \Rightarrow \qquad z_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N z_N$$

- Sei $i \in \{1, \dots, s\} \cap B$ fixiert. $\bar{a}_j$ (i, j)-te Eintrag von $A_B^{-1} A_N$, $\bar{b}$ i-te Eintrag von $A_B^{-1} b$. $f_0 := f\left(\bar{b}\right)$ mit $f(\alpha) := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

$$z_i \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j \in N} \bar{a}_j z_j = f_0 + k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

≥ 0 | < 0

$$\boxed{k \geq 0, \qquad \sum_{j \in N : \bar{a}_j \geq 0} \bar{a}_j z_j \geq f_0} \qquad \boxed{k \leq -1, \qquad -\frac{f_0}{1 - f_0} \sum_{j \in N : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j z_j \geq f_0}$$

- $$\Rightarrow \qquad \sum_{j \in N : \bar{a}_j \geq 0} \bar{a}_j z_j - \frac{f_0}{1 - f_0} \sum_{j \in N : \bar{a}_j < 0} \bar{a}_j z_j \geq f_0$$

Gomory's Mixed-Integer Cuts

$$\sum_{j\in N:\bar{a}_j\geq 0} \bar{a}_j z_j - \frac{f_0}{1-f_0} \sum_{j\in N:\bar{a}_j<0} \bar{a}_j z_j \geq f_0$$

Sei $f_j := f(\bar{a}_j)$. "Strengthening" liefert Gomory's Mixed-Integer Cut:

$$\sum_{\substack{j\leq s\\ f_j\leq f_0}} f_j z_j + \frac{f_0}{1-f_0} \sum_{\substack{j\leq s\\ f_j> f_0}} (1-f_j)\, z_j + \sum_{\substack{j> s\\ j\in N:\bar{a}_j\geq 0}} \bar{a}_j z_j - \sum_{\substack{j> s\\ j\in N:\bar{a}_j< 0}} \frac{f_0}{1-f_0} \bar{a}_j z_j \geq f_0$$

Theorem (Gomory 1960)

Falls $c^T z \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in G(b)$, so läßt sich (MIP") in endlich-vielen Schritten durch Hinzufügen dieser Cuts lösen.

Gomory's Mixed-Integer Cuts

$$\sum_{j\in N:\bar{a}_j\geq 0} \bar{a}_j z_j - \frac{f_0}{1-f_0} \sum_{j\in N:\bar{a}_j<0} \bar{a}_j z_j \geq f_0$$

Sei $f_j := f(\bar{a}_j)$. “Strengthening” liefert Gomory's Mixed-Integer Cut:

$$\sum_{\substack{j\leq s\\ f_j\leq f_0}} f_j z_j + \frac{f_0}{1-f_0} \sum_{\substack{j\leq s\\ f_j> f_0}} (1-f_j)\, z_j + \sum_{\substack{j>s\\ j\in N:\bar{a}_j\geq 0}} \bar{a}_j z_j - \sum_{\substack{j>s\\ j\in N:\bar{a}_j<0}} \frac{f_0}{1-f_0} \bar{a}_j z_j \geq f_0$$

Theorem (Gomory 1960)

Falls $c^T z \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in G(b)$, so läßt sich (MIP”) in endlich-vielen Schritten durch Hinzufügen dieser Cuts lösen.

Theorem (Balas 2003)

Gomory's Mixed-Integer cuts und Lift and Project Cuts sind äquivalent für 0-1 MIPs.

Mixed-Integer Rounding Cuts

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß}\ & A_x x + A_y y \leq b \\ & x, y \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^s \end{aligned}$$

1. Die Ungleichungen

$$u^T (A_x x + A_y y) \leq u^T b, \qquad u \in \mathbb{R}_+^m,$$

   sind zulässig für $G(b)$.

2. Seien $(\pi^i)^T x + (\mu^i)^T y \leq \lambda^i$, $i = 1, 2$, zulässig. Dann ist auch

$$\lfloor \pi^2 - \pi^1 \rfloor^T x + \frac{1}{1 - f_0} \left((\pi^1)^T x + \min(\mu^1, \mu^2)^T y - \lambda^1 \right) \leq \lfloor \lambda_2 - \lambda_1 \rfloor$$

   mit $f_0 = f(\lambda^2 - \lambda^1) = \lambda^2 - \lambda^1 - \lfloor \lambda^2 - \lambda^1 \rfloor$ zulässig.

Mixed-Integer Rounding Cuts

1. Die Ungleichungen
$$u^T(A_x x + A_y y) \leq u^T b, \qquad u \in \mathbb{R}^m_+,$$
sind zulässig für $G(b)$.
2. Seien $(\pi^i)^T x + (\mu^i)^T y \leq \lambda^i$, $i = 1, 2$, zulässig. Dann ist auch
$$\lfloor \pi^2 - \pi^1 \rfloor^T x + \frac{1}{1-f_0}\left((\pi^1)^T x + \min(\mu^1, \mu^2)^T y - \lambda^1\right) \leq \lfloor \lambda_2 - \lambda_1 \rfloor$$
mit $f_0 = f(\lambda^2 - \lambda^1) = \lambda^2 - \lambda^1 - \lfloor \lambda^2 - \lambda^1 \rfloor$ zulässig.

Theorem (Nemhauser, Wolsey 1990)

Sei $G(b) = \left\{(x, y) \in \{0,1\}^s \times \mathbb{R}^{n-s}_+ \,|A_x x + A_y y \leq b, x \leq \mathbf{1}\right\} \neq \emptyset$. Jede zulässige Ungleichung für $G(b)$ ist gleich oder wird dominiert von einem Mixed-Integer Rounding Cut.

Bemerkung: Theorem ist falsch für beschränkte ganzzahlige Variablen.

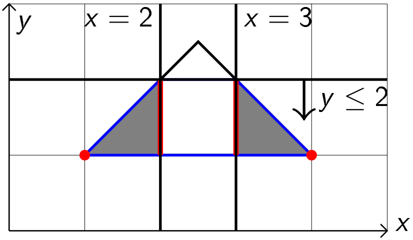
Split and Round

Definition (Split Cut)

$w^T x + v^T y \leq t$ heißt Split Cut vom Polyeder P, wenn $\exists u \in \mathbb{Z}^s$, $t \in \mathbb{Z}$: $w^T x + v^T y \leq t$ ist zulässig für

$$\left\{(x, y) \in P \,\middle|\, u^T x \leq t\right\}$$

$$\text{und } \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, u^T x \geq t + 1\right\}$$



Split Abschluss von $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n | (x, y) \text{ erfüllt alle Split Cuts von } P\}$

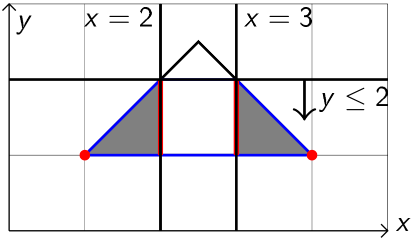
Split and Round

Definition (Split Cut)

$w^T x + v^T y \leq t$ heißt Split Cut vom Polyeder P, wenn $\exists u \in \mathbb{Z}^s$, $t \in \mathbb{Z}$: $w^T x + v^T y \leq t$ ist zulässig für

$$\left\{(x, y) \in P \,\middle|\, u^T x \leq t\right\}$$

$$\text{und } \left\{(x, y) \in P \,\middle|\, u^T x \geq t + 1\right\}$$



Split Abschluss von $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n | (x, y) \text{ erfüllt alle Split Cuts von } P\}$

Theorem (Cook, Kannan, Schrijver 1990)

Der Split Abschluss eines rationalen Polyeders P ist wieder ein Polyeder.

Aber: Iteratives Bilden des Split Abschlusses, ausgehend von $M(b)$, liefert i.a. nicht conv $G(b)$.

Split and Round

Seien A und b ganzzahlig. Sei $w^T x + v^T y \leq \delta$ mit $(w, v) \in \mathbb{Z}^n$ zulässig für $P = \{(x, y) \,|\, A_x x + A_y y \leq b\}$. Dann ist

$$w^T x + v^T y \leq [\delta]_{\Delta(A_y)} \tag{1}$$

zulässig für $P \cap (\mathbb{Z}^s \times \mathbb{R}^{n-s})$. $[\delta]_\Delta := \max\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \{1, .., \Delta\}, \frac{p}{q} \leq \delta \right\}$

Round Abschluss von P:= alle (x, y), die Ungleichungen wie (1) erfüllen.

Split and Round

Seien A und b ganzzahlig. Sei $w^T x + v^T y \leq \delta$ mit $(w, v) \in \mathbb{Z}^n$ zulässig für $P = \{(x, y) \,|A_x x + A_y y \leq b\}$. Dann ist

$$w^T x + v^T y \leq [\delta]_{\Delta(A_y)} \tag{1}$$

zulässig für $P \cap (\mathbb{Z}^s \times \mathbb{R}^{n-s})$. $[\delta]_\Delta := \max\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \{1, .., \Delta\}, \frac{p}{q} \leq \delta \right\}$

Round Abschluss von P:= alle (x, y), die Ungleichungen wie (1) erfüllen.

SPLIT(P) := Round Abschluss vom Split Abschluss von P

Theorem (Cook, Kannan, Schrijver 1990)

SPLIT(P) ist wieder ein Polyeder. Es existiert ein k, so daß

$$\text{conv}\, G(b) = SPLIT^k (M(b)).$$

Superadditive Funktionen

Definition (superadditiv, nichtfallend, Richtungsableitung)

Eine Funktion $F : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ heißt *superadditiv* auf D, wenn

$$F(d_1) + F(d_2) \leq F(d_1 + d_2) \qquad \forall d_1, d_2, d_1 + d_2 \in D.$$

F heißt *nichtfallend* auf D, wenn $F(d_1) \leq F(d_2)$ $\forall d_1, d_2 \in D$, $d_1 \leq d_2$.
Die *obere Richtungsableitung* von F in Null in Richtung d ist

$$\bar{F}(d) := \limsup_{\delta \searrow 0^+} \frac{F(\delta d)}{\delta}.$$

$\Gamma := \left\{ F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \,\middle|\, F \text{ superadditiv, nichtfallend, } F(0) = 0, \bar{F} \text{ existiert} \right\}$

Cuts mittels superadditiver Funktionen

$$\begin{aligned} \min\ & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{so daß}\ & A_x x + A_y y \leq b \\ & x, y \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^s \end{aligned}$$

Theorem (Blair, Jeroslow 1979)

Für $F \in \Gamma$ ist

$$\sum_{i=1}^{s} F\left(A_x e_i\right) x_i + \sum_{i=1}^{n-s} \bar{F}\left(A_y e_i\right) y_i \leq F\left(b\right)$$

eine zulässige Ungleichung für $G\left(b\right)$.

Cuts mittels superadditiver Funktionen

Theorem (Blair, Jeroslow 1979)

Sei $F \in \Gamma$. Eine zulässige Ungleichung für $G(b)$ ist

$$\sum_{i=1}^{s} F(A_x e_i)\, x_i + \sum_{i=1}^{n-s} \bar{F}(A_y e_i)\, y_i \leq F(b)\,. \tag{2}$$

Theorem (Nemhauser, Wolsey 1990)

Betrachte $G(b) = \left\{(x, y) \in \{0,1\}^s \times \mathbb{R}_+^{n-s} \,|A_x x + A_y y \leq b\right\} \neq \emptyset$. Jede zulässige Ungleichung ist gleich oder wird dominiert von einer Ungleichung (2) für ein $F \in \Gamma$.

Dieses Theorem gilt auch für beschränkte MIPs (Jeroslow 1979) und unbeschränkte MIPs mit rationalen Koeffizientenmatrizen (Blair 1978).

Dualität

$$(P)\quad \min_{x,y}\ c_x^T x + c_y^T y \qquad\qquad (D)\quad \max_F\ F(b)$$

$$\text{so daß } A_x x + A_y y = b \qquad \text{so daß } F(A_x e_i) \le c_x^T e_i \quad 1 \le i \le s$$

$$x, y \ge 0 \qquad \bar{F}(A_y e_i) \le c_y^T e_i \quad 1 \le i \le n-s$$

$$x \in \mathbb{Z}^s \qquad F \in \Gamma$$

Theorem (Jeroslow 1979)

Für jedes Paar von zulässigen Punkten (x, y) von (P) und F von (D) gilt

$$c_x^T x + c_y^T y \ge F(b).$$

Die Optimalwerte von (P) und (D) sind gleich.
Die Optimalwertfunktion $\varphi(b)$ (c fixiert) ist zulässig und optimal für (D).

Zusammenfassung

- Cook, Gerards, Schrijver: $\exists$ Matrix D: $\operatorname{conv} G(b) = \{z \,|Dz \leq d_b\}$ für A, b ganzzahlig oder rein-ganzzahlige Programme.
- Disjunctive Programming: $\operatorname{conv} G(b)$ mittels Lifting und Projektion für beschränkte ganzzahlige Variablen.
- Lift and Project Cuts: $\operatorname{conv} G(b)$ durch sequentielles Lifting für 0-1 MIPs
- Gomory's Mixed-Integer Cuts: endlicher Algorithmus zum Lösen von MIP, falls Zielfunktion ganzzahlig auf $G(b)$
- Mixed-Integer Rounding Cuts: Jede zulässige Ungleichung eines 0-1 MIPs wird dominiert durch einen MIR Cut.
- Split and Round Cuts: Darstellung von $\operatorname{conv} G(b)$ für A, b ganzzahlig durch endlich viele Split-and-Round Schritte.
- Superadditive Funktionen: Jede zulässige Ungleichung für $G(b)$ läßt sich mittels einer superadditiven nichtfallenden Funktion darstellen.