

Lösung Klassenstufe 11/12/13 Aufgabe 3

Für $1 \leq n \leq 2009$ erhalten wir Q_n durch Drehen von Q_{n-1} am Punkt P_n um den Winkel $2 \cdot |\angle P_{n-1}P_nP_{n+1}|$. Man überzeugt sich leicht, dass man denselben Punkt erreicht, wenn man Q_{n-1} zuerst an der Gerade $P_{n-1}P_n$ und anschließend an der Geraden P_nP_{n+1} spiegelt. Ergo erhält man Q_1 , wenn man den Punkt $Q = Q_0$ zuerst an $P_{2009}P_1$ und dann an P_1P_2 spiegelt und den Punkt Q_2 , wenn man den Punkt Q sukzessive an P_0P_1 , P_1P_2 , P_1P_2 und P_2P_3 spiegelt. Zweimaliges Spiegeln an P_1P_2 direkt hintereinander ist die identische Abbildung, folglich erhält man Q_2 , wenn man Q zuerst an $P_{2009}P_1$ und dann an P_2P_3 spiegelt. Induktiv erhält man, dass Q_n durch Spiegeln von Q zunächst an $P_{2009}P_1$ und anschließend an P_nP_{n+1} .

Demnach entsteht Q_{2009} , indem man Q zuerst an $P_{2009}P_1$ spiegelt und im Anschluss an $P_{2009}P_{2010}=P_{2009}P_1$. Da dies den Punkt Q aber nicht verändert, gilt $Q_{2009} = Q$. \square