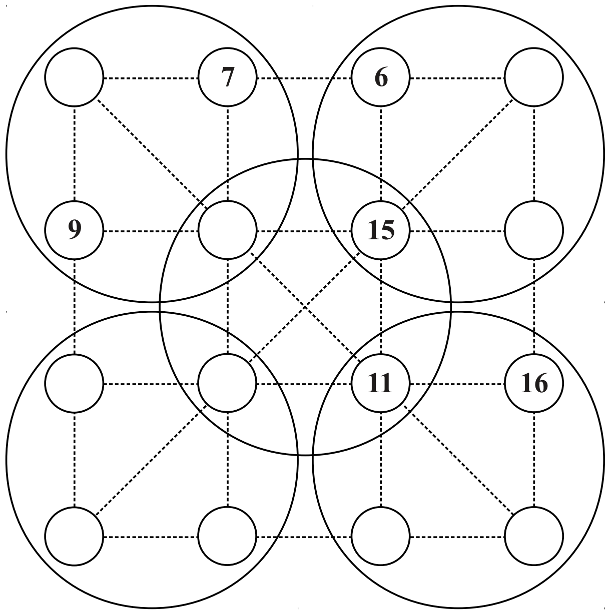
Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

Aufgabe 1

Trage in die kleinen Kreise der nebenstehenden Figur positive ganze Zahlen so ein, dass

- die Summe der vier Zahlen in jedem der fünf großen Kreise 50 ergibt,
- die Summe der vier Zahlen in jeder der zehn gestrichelten Reihen ebenfalls 50 ergibt,
- insgesamt keine Zahl doppelt vorkommt.



Finde alle Möglichkeiten. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Auf dem Blatt 2 findet ihr vorbereitete Grafiken zum Eintragen der Lösungen (wobei ihr vielleicht nicht alle vier Grafiken braucht, wenn es weniger als vier Lösungen gibt).

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 2

Es sei n eine natürliche Zahl. Nun bildet man die Zahlenmenge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$.

a) Schreibe die jeweiligen Zahlenmengen für $n = 1, ..., 10$ auf. Beispiel: Für $n = 5$ folgt: $n - 1 = 4, n + 1 = 6$ und $n^2 + 1 = 26$. Die Menge hat also die Form: $\{4, 5, 6, 26\}$. In dieser Menge ist die Zahl 5 selbst durch 5 teilbar.

b) Prüfe, ob es in jeder Zahlenmenge von a) eine Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist.

c) Beweise, dass es für jedes n (auch größer 10) in der Menge immer eine Zahl gibt, die durch 5 teilbar ist.

Platz für die Lösung:

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

Aufgabe 3

Gegeben sind die periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0,\overline{3456}, \qquad q = 0,3\overline{456}, \qquad r = 0,34\overline{56}, \qquad s = 0,345\overline{6}.$$

1. Ermittle für jeden dieser vier Dezimalbrüche diejenige Ziffer, die an der 2013. Stelle nach dem Komma steht!
2. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die gilt:
   Die genannten vier Dezimalbrüche haben an der n-ten Stelle nach dem Komma dieselbe Ziffer.
3. Wir betrachten nun in den vier Dezimalbrüchen die Ziffern, die an der gleichen Nachkommastelle stehen. Welches Ereignis tritt bis zur 2013. Stelle häufiger ein:
   (a) Keine dieser vier Ziffern ist eine 5.
   (b) Mindestens drei der vier Ziffern sind eine 6.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 4

Über ein Viereck $ABCD$ (in üblicher Bezeichnung) werde vorausgesetzt, dass

(a) alle Eckpunkte auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M liegen,

(b) der Mittelpunkt M auf $\overline{CD}$ liegt,

(c) $\overline{AB}$ parallel zu $\overline{CD}$ verläuft,

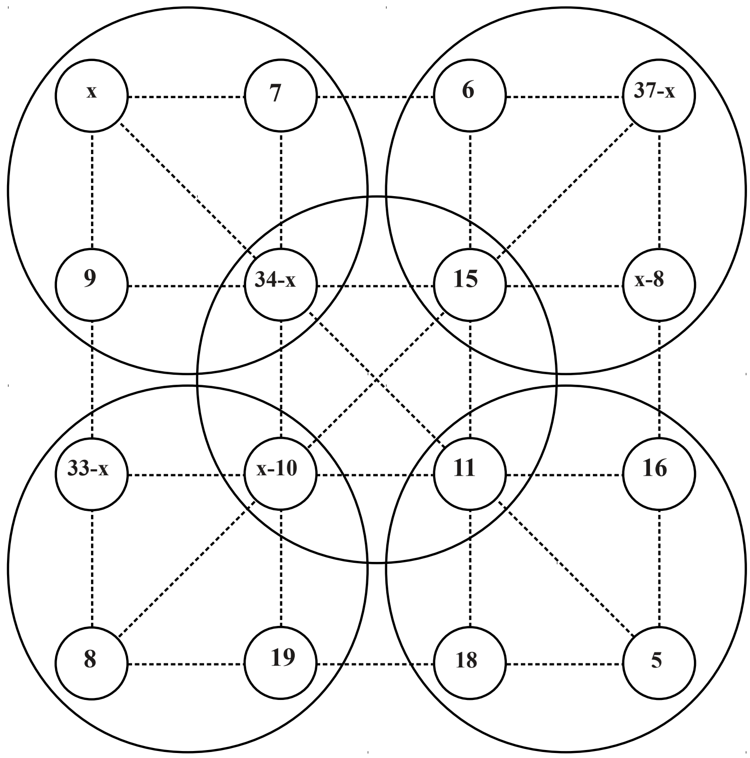
(d) der Radius $\overline{BM}$ mit $\overline{AB}$ einen Winkel der Größe 46° bildet,

(e) $\overline{BM}$ die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkt S schneidet.

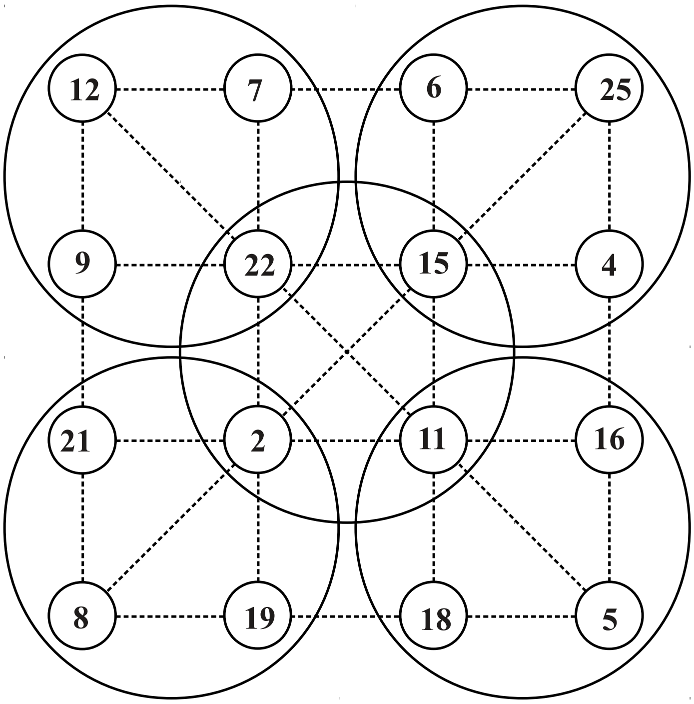
1. Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle BSC$!
2. Ermittle die Größe des Winkels $\angle BSC$ allgemein in Abhängigkeit von der Größe des Winkels $\angle MBA$! (Die Größe des Winkels $\angle MBA$ ist hier nicht mehr fest vorgegeben, d. h. die Voraussetzung (d) darf für diesen Aufgabenteil nicht verwendet werden.)
3. Uwe misst nun in seiner allgemeinen Skizze die Winkel nach und behauptet: „Der gesuchte Winkel $\angle BSC$ ist bei mir 140° groß." Kann das sein? Nimm zu dieser Behauptung Stellung!

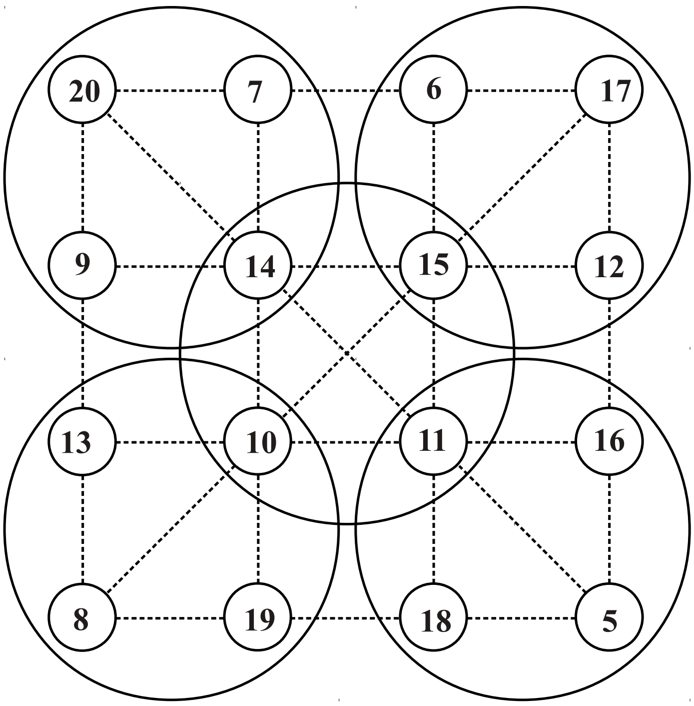
Platz für die Lösung:

- Im unteren rechten Kreis findet man sofort die Zahlen 18 und 5.
- Nach Eintrag von x in den oberen linken kleinen Kreis ergeben sich in den oberen drei Zeilen weitere Eintragungen in Abhängigkeit von x.
- Dadurch ergeben sich in den noch fehlenden kleinen Kreisen unten links die Zahlen 8 und 19.



- Wegen $x-10$ muss $x > 10$ und wegen $33-x$ muss $x < 33$ gelten. x soll ja eine positive ganze Zahl sein.
- Da alle Einträge verschieden sein sollen, darf x nicht 11,15,16,18 oder 19 sein, denn diese Zahlen sind schon eingetragen.
- Einsetzen von 13,14,17,23,24,26 und 27 in $x-8$ führt auf Zahlen, die schon eingetragen sind, nämlich 5,6,9,15,16,18 und 19.
- Einsetzen von 21,25,28 und 29 in $x-10$ führt auf Zahlen, die schon eingetragen sind, nämlich 11,15,18 und 19.
- Einsetzen von 22 in $33-x$ führt auf die Zahl 11, die schon eingetragen ist.
- Einsetzen von 30,31 und 32 in $37-x$ führt auf Zahlen, die schon eingetragen sind, nämlich 7,6 und 5.
- übrig bleiben $x = 12$ und $x = 20$, die beim Einsetzen in $x-8$ und $x-10$ und $33-x$ und $34-x$ und $37-x$ immer auf Zahlen führen, die noch nicht eingetragen sind.
- Es gibt also zwei Lösungen. Beide erfüllen die Vorgaben, dass positive ganze Zahlen eingetragen werden sollen und keine Zahl doppelt vorkommt.





Hinweis: Natürlich kann man die Eintragung der Zahlen auch durch Knobeln erhalten. Dabei muss aber deutlich werden, dass alle Eintragungsmöglichkeiten gefunden wurden und dass es darüber hinaus keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Vorschlag der Punktbewertung:

- 4 Punkte: Finden einer Möglichkeit.
- 4 Punkte: Finden der zweiten Möglichkeit.
- 2 Punkt: Vollständigkeit der untersuchten Fälle. Siehe Hinweis.

a) Es könnte z.B. folgende Tabelle entstehen:

$n-1$	n	$n+1$	n^2+1
$\underline{0}$	1	2	2
1	2	3	$\underline{5}$
2	3	4	$\underline{10}$
3	4	$\underline{5}$	17
4	$\underline{5}$	6	26
$\underline{5}$	6	7	37
6	7	8	$\underline{50}$
7	8	9	$\underline{65}$
8	9	$\underline{10}$	82
9	$\underline{10}$	11	101

b) Die in der Tabelle unterstrichenen Zahlen sind durch 5 teilbar, da sie entweder auf 0 oder 5 enden.

c)
- Von den fünf aufeinander folgenden Zahlen $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ und $n+2$ muss eine durch 5 teilbar sein.
- Falls $n-1$, n oder $n+1$ durch 5 teilbar ist, dann gibt es in der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ eine durch 5 teilbare Zahl.
- Falls dies nicht der Fall ist, muss $n-2$ oder $n+2$ durch 5 teilbar sein. Dann ist auch $(n-2)(n+2)$ durch 5 teilbar. (Teilbarkeit des Produktes, falls einer der Faktoren durch 5 teilbar ist.)
- Nun ist $(n-2)(n+2) = n^2 - 4 = (n^2+1) - 5$. Somit muss auch n^2+1 durch 5 teilbar sein. (Teilbarkeit der Summe; beide Summanden müssen durch 5 teilbar sein.)
- Fazit: In jedem Fall ist also eine der Zahlen der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ durch 5 teilbar.

Alternativlösung zu c):

- Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.
- Die letzten Ziffern der Zahlen $n-1, n, n+1$ und n^2+1 hängen nur von den letzten Ziffern von n ab.
- Es reicht also, für jeweils eine Zahl mit der Endziffer 0,1,2,3,4,5,6,7,8 oder 9 zu prüfen, ob mindestens eine der Zahlen aus der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ die Endziffer 0 oder 5 hat.
- Dies wurde eigentlich bereits in Teilaufgabe b erledigt.

Vorschlag der Punktbewertung:

- Aufgabenteil a: 3 Punkte
- Aufgabenteil b: 2 Punkte
- Aufgabenteil c: 5 Punkte

Es ist günstig für die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben, sich die vier Zahlen mit den ersten 16 Dezimalstellen aufzuschreiben:

p = 0,3456 3456 3456 3456 ...
q = 0,3456 4564 5645 6456 ...
r = 0,3456 5656 5656 5656 ...
s = 0,3456 6666 6666 6666 ...

Nun wiederholt sich jeweils der Zyklus der letzten 12 Ziffern.

1. für p: die Ziffernfolge nach dem Komma wiederholt sich alle 4 Stellen, also $2013 : 4 = 503$ Rest 1, also steht an der 2013. Stelle eine 3.
   für q: ab der 5. Stelle nach dem Komma wiederholt sich die Ziffernfolge aller 3 Stellen, also $(2013 - 4) : 3 = 669$ Rest 2, also steht an der 2013. Stelle eine 5.
   für r: ab der 5. Stelle nach dem Komma wiederholt sich die Ziffernfolge aller 2 Stellen, also $(2013 - 4) : 2 = 1004$ Rest 1, also steht an der 2013. Stelle eine 5.
   für s: ab der 5. Stelle nach dem Komma folgen nur noch Ziffern 6, also steht an der 2013. Stelle eine 6.

2. Wie an der oberen Darstellung der Zahlen sofort abzulesen ist, haben die vier Zahlen an den ersten 4 Stellen nach dem Komma dieselben Ziffern. Innerhalb der nachfolgenden 12-er Zyklen trifft dies nur auf die jeweils letzte Stelle zu. Erstmals also an der 16. Stelle nach dem Komma und dann wieder alle 12 Stellen.
   Für n gilt also: $n = 1, 2, 3, 4, 16 + k \cdot 12$ mit $k \in \mathbb{N}$

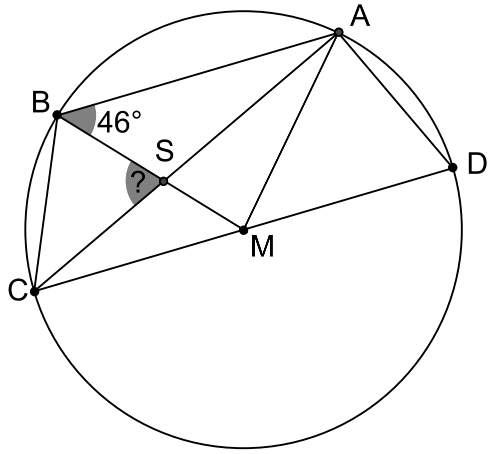
3. Um herauszufinden, welches Ereignis häufiger auftritt, schaut man sich wieder die Darstellung der vier Zahlen an:
   Ereignis (a) (Keine der vier Ziffern ist eine 5.) kommt an der 1., 2. und 4. Stelle nach dem Komma vor sowie an der 4., 6., 10. und 12. Stelle innerhalb jedes 12-er Zyklus. Insgesamt sind es 167 solcher 12-er Zyklen bis zur 2008. Stelle nach dem Komma ($167 \cdot 12 + 4 = 2008$), danach folgen noch 5 Stellen des nächsten 12-er Zyklus, in denen der Fall noch genau einmal auftritt.
   Insgesamt tritt der Fall also $3 + 167 \cdot 4 + 1 = \underline{672}$ mal auf.
   Ereignis (b) (Mindestens drei der vier Ziffern sind eine 6.) kommt an der 4. Stelle nach dem Komma vor sowie an der 4., 6., 8. und 12. Stelle innerhalb jedes 12-er Zyklus. Innerhalb der letzten 5 Stellen nach der 2008. Stelle kommt dieses Ereignis genau einmal vor.
   Insgesamt tritt dieser Fall also $1 + 167 \cdot 4 + 1 = \underline{670}$ mal auf.
   Ein Vergleich zeigt, dass Ereignis (a) (Keine der vier Ziffern ist eine 5.) bis zur 2013. Stelle nach dem Komma häufiger vorkommt.

Hinweis: Für die Untersuchung im Aufgabenteil 3 genügt es, die Anzahl der jeweiligen Ereignisse innerhalb der ersten 4 und innerhalb der letzten 5 Stellen zu untersuchen, da innerhalb der 12-er Zyklen die Anzahl ja gleich ist (jeweils 4 mal). Damit ergibt sich, dass Ereignis (a) (Keine der vier Ziffern ist eine 5.) 4 mal vorkommt und Ereignis (b) (Mindestens drei der vier Ziffern sind eine 6.) 2 mal vorkommt. Der Vergleich ergibt dann natürlich auch, dass Ereignis (a) (Keine der vier Ziffern ist eine 5.) bis zur 2013. Stelle nach dem Komma häufiger vorkommt.

Vorschlag der Punktbewertung:

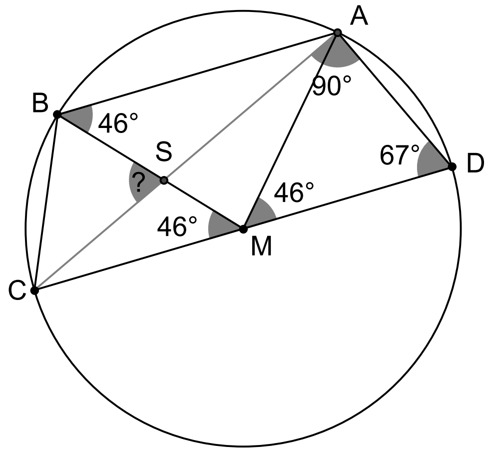
- zu 1.: 4 Punkte
- zu 2.: 3 Punkte
- zu 3.: 3 Punkte

Zunächst ist es sinnvoll, den Sachverhalt zu skizzieren.

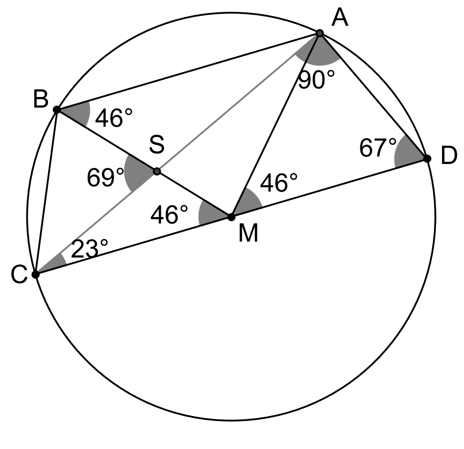


Nun kann z.B. nacheinander festgestellt werden:

- Das Viereck $ABCD$ ist ein (gleichschenkliges) Trapez mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Nach Einzeichnen des Radius $\overline{MA}$ entstehen drei gleichschenklige Dreiecke ABM, BCM und DAM. In ihnen sind die jeweiligen Basiswinkel gleich groß; im Dreieck ABM gilt dies für die Winkel $\angle MBA$ und $\angle BAM$.
- Außerdem entstehen am Punkt M Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also sind auch die Winkel $\angle BMC$ und $\angle DMA$ genau so groß wie der gegebene Winkel $\angle MBA$. Alle vier Winkel sind also 46° groß.
- Die Basiswinkel in den Dreiecken BCM und DAM können nun berechnet werden. Speziell gilt also für den Winkel $\angle ADM = \frac{1}{2} \cdot (180° - 46°) = 67°$.
- Das Dreieck CDA ist nach Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck, also ist der Winkel $\angle CAD$ gleich 90°.



- In diesem Dreieck CDA gilt nun für den dritten Innenwinkel $\angle DCA = 180° - 90° - 67° = 23°$.



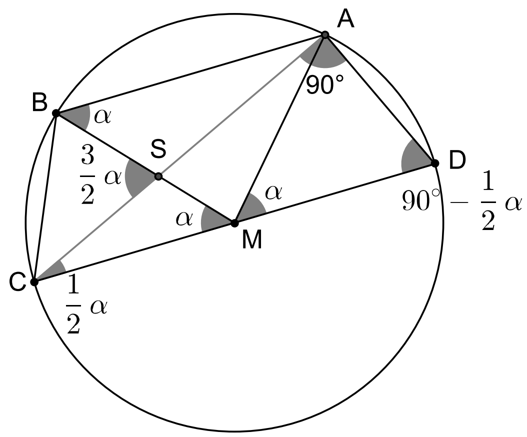
- Der gesuchte Winkel $\angle BSC$ ist Außenwinkel des Dreiecks *CMS* und nach Außenwinkelsatz genau so groß wie die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel. Also gilt: $\angle BSC = 23° + 46° = 69°$.

Damit ist Teilaufgabe 1 erledigt.

Abhängigkeit des Winkels $\angle BSC$ vom Winkel $\angle MBA$

Das Vorgehen ähnelt dem gerade beschriebenen Weg, allerdings werden nun die entsprechenden Winkel immer in Abhängigkeit des gegebenen Winkels $\angle MBA = \alpha$ angegeben.

- Die vier Winkel $\angle MBA$, $\angle BAM$, $\angle BMC$ und $\angle DMA$ sind nun alle genau so groß wie α.
- Damit ergibt sich für den Winkel $\angle ADM = \frac{1}{2} \cdot (180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.
- Für den dritten Winkel $\angle DCM$ im rechtwinkligen Dreieck *CDA* gilt nun $\angle DCM = 180° - 90° - (90° - \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\alpha$.
- Für den gesuchten Winkel $\angle BSC$ als Außenwinkel des Dreiecks *CMS* gilt nun nach Außenwinkelsatz:
$$\angle BSC = \frac{1}{2}\alpha + \alpha = \frac{3}{2}\alpha.$$
- Der gesuchte Winkel $\angle BSC$ ist also 1,5 mal so groß wie der gegebene Winkel $\angle MBA$.

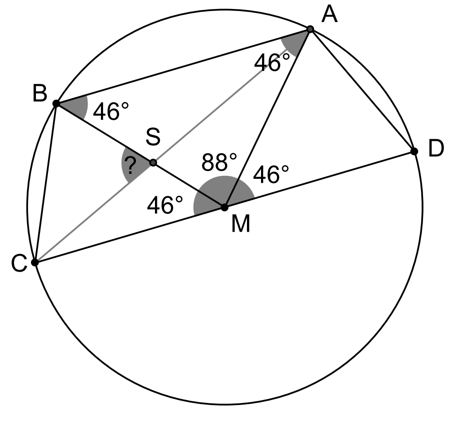


Damit ist Teilaufgabe 2 erledigt.

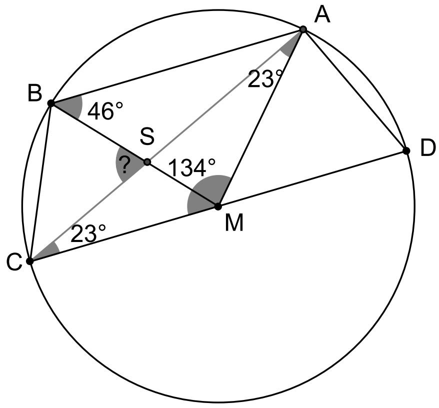
1.Hinweis: Natürlich kann man auch zuerst den allgemeinen Fall (Teilaufgabe 2) betrachten und dann auf das entsprechende Ergebnis des konkreten Falls in der Teilaufgabe 1 schließen.

2.Hinweis: Natürlich kann die Lösung auch ohne Verwendung des Satzes von Thales und ohne Außenwinkelsatz erfolgen.

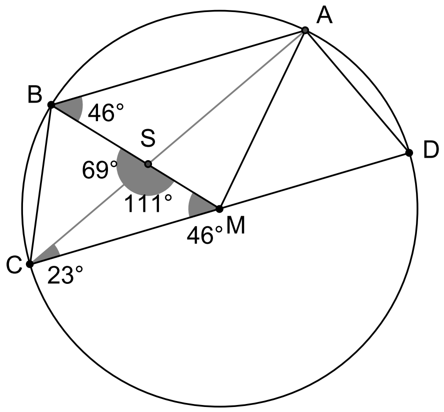
- Im gleichschenkligen Dreieck *ABM* sind beide Basiswinkel 46°, also ist der Winkel $\angle AMB = 88°$.
- Der Winkel $\angle SMC$ ist als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen 46° groß.



- Betrachtet man nun das Dreieck ACM, so ist auch dieses Dreieck gleichschenklig mit dem Winkel $\angle AMC = 134°$ und den Basiswinkeln $\angle MCA = \angle CAM = 23°$.



- Im Dreieck CMS kennt man nun zwei Winkel und kann den dritten Winkel $\angle CSM = 111°$ ausrechnen.
- Der gesuchte Winkel $\angle BSC$ ist nun Nebenwinkel zu $\angle CSM$ und damit ist $\angle BSC = 69°$ groß.



<u>Kann der gesuchte Winkel $\angle BSC = 140°$ groß sein?</u>

- Der gegebene Winkel $\angle ABM$ ist Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, er muss also kleiner als 90° sein.
- Mit der eben gemachten Erkenntnis, dass der gesuchte Winkel $\angle BSC$ das 1,5-fache des gegebenen Winkels $\angle ABM$ ist, kann man nun schlussfolgern, dass $\angle BSC < 135°$ sein muss.
- Wenn Uwe eine korrekte (d.h. der Aufgabenstellung nach korrekte) Skizze hat, kann der gesuchte Winkel also nicht 140° groß sein. Die gemachte Behauptung ist also falsch.

<u>Vorschlag der Punktbewertung:</u>

- zu 1.: 4 Punkte
- zu 2.: 4 Punkte
- zu 3.: 2 Punkte