Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 1

a) In einer geschlossenen Urne befinden sich 27 weiße und 4 schwarze Kugeln. Daneben steht eine offene Schale mit einer ausreichenden Anzahl schwarzer und weißer Kugeln. Es wird folgendes Verfahren durchgeführt:

Aus der Urne werden auf gut Glück zwei Kugeln mit einem Griff gezogen und in die Schale gelegt. Haben sie dieselbe Farbe, dann wird aus der Schale eine schwarze Kugel in die Urne gelegt. Haben sie verschiedene Farben, dann wird aus der Schale eine weiße Kugel in die Urne gelegt.

Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis sich in der Urne nur noch eine einzige Kugel befindet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese letzte Kugel weiß?

b) Wie groß ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn zu Anfang w weiße und s schwarze Kugeln in der Urne sind?

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 2

Auf einem rechteckigen Blatt Papier werden mit einem Lineal vier gerade Linien gezogen, die jeweils von Rand zu Rand verlaufen. Entlang dieser Linien wird das Blatt zerschnitten.

a) Wie viele Papierschnipsel können dabei entstehen? Geben Sie alle Möglichkeiten an. Begründen Sie, dass es nicht mehr als die genannten geben kann.

Es werden nun n Linien auf dem Blatt gezogen.

b) Finden Sie eine Formel, mit der die Maximalzahl der entstehenden Papierschnipsel berechnet werden kann.

c) Beweisen Sie die Richtigkeit der in b) gefundenen Formel.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3

a) Finden Sie eine Funktion f, die für alle rationalen Zahlen definiert ist und nur rationale Werte annimmt, sodass stets

$$f(x_1 + x_2) - 2 \cdot f(x_1 - x_2) + f(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2, \qquad (*)$$

erfüllt ist, unabhängig von der Wahl von rationalen Zahlen x_1, x_2.

b) Ermitteln Sie alle Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die die Funktionalgleichung (*) für alle rationalen Zahlen x_1, x_2 erfüllen.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 4

Gegeben sei eine endliche Menge S von Punkten in der Ebene. Wir nennen S *vollständig*, wenn es für jeden Punkt P in der Ebene einen Punkt Q aus S gibt, sodass der euklidische Abstand zwischen P und Q irrational ist.

a) Zeigen Sie, dass S mehr als zwei Punkte enthalten muss.

b) Wie viele Elemente muss jede vollständige Menge von Punkten der Ebene mindestens enthalten (mit Beweis)?

Platz für die Lösung:

Das geordnete Zahlenpaar zweier natürlicher Zahlen (n, m) beschreibe die möglichen Zustände in Urne 1, wobei n die Anzahl der weißen und m die Anzahl der schwarzen Kugeln in Urne 1 bedeuten soll.

Nach dem angegebenen Ziehungsverfahren verändert sich der Zustand in Urne 1 zu

- $(n-2, m+1)$, falls zwei weiße Kugeln gezogen werden bzw. zu
- $(n, m-1)$, falls zwei verschiedenfarbige Kugeln oder zwei schwarze Kugeln gezogen werden.

Die Reduzierung der weißen Kugeln erfolgt also immer in 2er-Schritten, während hingegen die Reduzierung der schwarzen Kugeln immer in 1er-Schritten erfolgt. Dies legt folgende Fallunterscheidung nahe:

- Falls die Anzahl w der weißen Kugeln gerade ist, wird das Ziehungsverfahren immer bis zu einem Zustand $(2, m)$ führen, was daraufhin nach dem angegebenen Ziehungsverfahren immer auf einen letzten Zustand $(0, 1)$ führt.
- Falls die Anzahl w der weißen Kugeln ungerade ist, wird das Ziehungsverfahren immer bis zu einem Zustand $(1, m)$ führen, was daraufhin nach dem angegebenen Ziehungsverfahren immer auf einen letzten Zustand $(1, 0)$ führt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Kugel eine weiße Kugel ist, ist also bei gerader Anzahl w der weißen Kugeln gleich 0 bzw. bei ungerader Anzahl w der weißen Kugeln gleich 1. $\square$

a) Es können 5, 6, 7, 8, 9, 10 oder 11 Papierschnipsel entstehen. Angabe durch Zeichnung. Je mehr Schnittpunkte die vier Geraden haben, desto mehr Teile entstehen. Die maximale Anzahl von Schnittpunkten ist 6. Begründung: Wähle zwei sich schneidende Geraden. Eine dritte Gerade kann so gewählt werden, dass sie diese beiden Geraden schneidet. Damit haben wir bereits drei Schnittpunkte. Die vierte Gerade kann mit jeder der vorigen Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben. Bei 6 Schnittpunkten entstehen 11 Teile.

b) Die Maximalzahl der entstehenden Papierschnipsel beträgt bei n Linien $\frac{n^2+n+2}{2}$.

c) Beweis durch vollständige Induktion:
Der Induktionsanfang ist durch Teilaufgabe a) geleistet.
Die Formel gelte für n gerade Linien. Eine weitere gerade Linie kann im Extremfall alle bisherigen Linien einmal schneiden. Dabei werden $n+1$ Flächenstücke zerschnitten. Also wächst die Anzahl der Teile um $n+1$. Es ist

$$\frac{n^2+n+2}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2+2n+2}{2}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$$

Damit gilt die Formel auch für $n+1$ gerade Linien. $\square$

Setzen wir $x_1 = 0$ und $x_2 = x$ in die Funktionalgleichung ein, so erhalten wir

$$f(x) - 2f(-x) + f(0) = -x^2$$

und mit $x_1 = 0$, $x_2 = -x$ bekommen wir

$$f(-x) - 2f(x) + f(0) = -x^2.$$

Addition der ersten und zweimal der zweiten Gleichung liefert

$$-3f(x) + 3f(0) = -3x^2.$$

Dies ist äquivalent zu $f(x) = x^2 + f(0)$. Eine Probe bestätigt, dass alle durch $f(x) = x^2 + c$ mit rationalem c definierten Funktionen die Funktionalgleichung erfüllen. $\square$

Dass $|S| \geq 2$ gilt, ist offensichtlich. Angenommen, S besteht aus zwei Punkten A und B, die den Abstand d voneinander haben. Wir wählen zwei rationale Zahlen x, y mit $d/2 < x, y < d$. Dann schneiden sich die zwei Kreise mit Mittelpunkten A und B sowie Radien x bzw. y in zwei Punkten, die von A und B jeweils einen rationalen Abstand haben, Widerspruch. Also $|S| \geq 3$.

Im Folgenden zeigen wir, dass eine dreielementige vollständige Menge S existiert: Wir wählen drei kollineare Punkte A, B, C, sodass $|AB| = |BC| = r$, wobei r^2 irrational ist. Angenommen, es gäbe einen Punkt P in der Ebene, sodass alle drei Abstände $a := |PA|$, $b := |PB|$, $c := |PC|$ rational sind. Sei $\alpha := \angle PBA$. Der Kosinussatz in den Dreiecken $\triangle APB$ bzw. $\triangle BPC$ liefert uns die folgenden Gleichungen:

$$r^2 + b^2 - 2br\cos\alpha = a^2$$

$$r^2 + b^2 + 2br\cos\alpha = c^2$$

Es folgt also

$$r^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - b^2,$$

im Widerspruch zu r^2 irrational. Ergo ist mindestens eine der Zahlen a, b, c irrational. $\square$