Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 15

Die folgenden Aufgaben werden vom 4. bis zum 15. Februar teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 15.A Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ stetig, monoton fallend und nicht konstant 0 oder 1.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x)^n = x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Lösung $x_n \in (0,1)$ hat.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Aufgabe 15.B Sei $f_n : X \to \mathbb{R}^n$ eine Folge von Funktionen von einem metrischen Raum X nach $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen die Null-Funktion 0.

Aufgabe 15.C Untersuchen Sie die folgenden reelle Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) $f_n(x) = \arctan(nx)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$, wobei $\alpha > 0$ eine fixierte reelle Zahl ist.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Aufgabe 15.D Zeigen Sie die folgenden Beziehungen zwischen den Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen und der Logarithmusfunktion:

a) $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ für alle $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$.

c) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$.

d) $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}, |x| > 1$.

Aufgabe 15.E
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $C(X,Y)$ der Raum der stetigen Abbildungen von X nach Y. Zeigen Sie, dass $d_\infty : C(X,Y) \times C(X,Y) \to \mathbb{R}$ mit

$$d_\infty(f,g) := \sup\Big\{ d_Y\big(f(x), g(x)\big) \,\Big|\, x \in X \Big\}, \quad f, g \in C(X,Y)$$

eine Metrik auf $C(X,Y)$ definiert falls X kompakt ist.

Aufgabe 15.F Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis.

a) Zeigen Sie, dass S^1 zusammenhängend ist.

b) Sei $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ eine stetig Abbildung. Zeigen Sie, dass ein Paar antipodaler Punkte $(z, -z)$, $z \in S^1$ existiert, sodass $f(z) = f(-z)$.

c) Zeigen Sie, dass es auf der Erde unendlich viele Paare antipodaler Punkte mit der selbe Temperatur gibt.

Aufgabe 15.G Sei $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ein reelles Polynom, sodass $P(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass reelle Polynome $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ existieren, sodass:

$$P(x) = Q_1(x)^2 + \cdots + Q_n(x)^2.$$

Aufgabe 15.H Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n(x) := f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie:

a) Wenn f stetig ist, dann $f_n \to f_n$ punktweise.

b) Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann $f_n \to f$ gleichmäßig.

c) Gilt $f_n \to f$ wenn f nicht stetig ist?

Aufgabe 15.I (Eine raumfüllende Kurve)

a) Finden Sie eine stetige Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass

$$0 \leq f(t) \leq 1 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = f(t+2) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

b) Sei $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ mit

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(3^{2n-1}t)}{2^n}, \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(3^{2n}t)}{2^n}.$$

Zeigen Sie, dass γ wohldefiniert und stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass das Bild von γ das Quadrat $Q = [0,1] \times [0,1]$ ist. Genauer: Zeigen Sie, dass bereits das Bild der Kantormenge $\mathcal{C}$ (siehe Aufgabe W.4) ganz Q ist.

Zusatzaufgabe 15.Z
Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $f_n \to f$ gleichmäßig gegen ein $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Sind alle f_n Polynome höchstens vom Grad k, dann ist auch f ein Polynom höchstens vom Grad k. Was passiert wenn $f_n \to f$ nur punktweise?