HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*
SoSe 2019

Übungsblatt 4

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 9. Mai 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)
Geben Sie eine rationale Zahl an, die $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ mit einer Genauigkeit von mindestens 0,000005 approximiert. (Benutzen Sie dabei keinen Rechner, der $\cos(x)$ ausrechnen kann!)

Aufgabe 4.2 (2 + 2 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (x-1)^5 + 2(x-1)^4$ auf dem Intervall $(0,4)$.

b) $f(x) = x^x$ auf dem Intervall $(0,\infty)$.

c) $f(x) = (x-1)^p(2-x)^q$ auf dem Intervall $[1,2]$, wobei $p,q \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.3 (2 + 3 + 3 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, E ein normierter Vektorraum, $f : \mathcal{U} \to E$ eine Funktion, und $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ zwei glatte Funktionen mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a \in \mathcal{U}$ und $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: Ist f in a differenzierbar, dann gilt $(f\circ\gamma_1)'(0) = (f\circ\gamma_2)'(0) = \nabla_{\mathbf{v}} f(a)$.

b) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen besitzt aber nicht stetig ist. Finden Sie zwei glatte Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0,0)$ und $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ erfüllen, aber nicht $(f\circ\gamma_1)'(0) = (f\circ\gamma_2)'(0)$.

c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y) := \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Beweisen Sie, dass in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen von g existieren und g auch stetig ist, aber nicht differenzierbar. *Hinweis: Ist* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} g(0,0)$ *linear?*

Aufgabe 4.4 (3 + 3 Punkte)
Sei $F = (x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion gegeben durch $x(r,\theta) = r\cos\theta$ und $y(r,\theta) = r\sin\theta$.

a) Berechnen Sie in einem beliebigen Punkt $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, und die Jacobi-Matrix

$$J_F(r,\theta) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Unter welchen Bedingungen ist $J_F(r,\theta)$ invertierbar?

b) Auf der offenen Teilmenge $\mathcal{U} := (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ ist F injektiv, und ihr Bild $\mathcal{V} := F(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ ist auch offen. Schreiben Sie die Umkehrfunktion

$$F^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U} : (x, y) \mapsto (r(x, y), \theta(x, y))$$

hin, berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_{F^{-1}}(x, y)$, und prüfen Sie nach, dass die Matrizen $J_{F^{-1}}(x, y)$ und $J_F(r, \theta)$ Inverse sind, wenn $(x, y) = F(r, \theta)$.

Insgesamt: **24 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 4.Z (3 Punkte)
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in (a, b)$ n-mal differenzierbare Funktion, $n \geq 3$, mit $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 2, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Beweisen Sie: f hat in x_0 einen Wendepunkt genau dann, wenn n ungerade ist.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 4.A
Für die numerische Berechnung von Werten der Logarithmusfunktion eignet sich die Taylorreihe von $f(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Beweisen Sie, dass f auf dem Intervall $(-1, 1)$ reell-analytisch ist.
Hinweis: Die Funktion $\ln x$ *ist auf* $(0, \infty)$ *reell-analytisch (s. Aufgabe 3.B).*

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe für f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

c) Bestimmen Sie die Zahl $\ln 2$ mit einer Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma.

Aufgabe 4.B

a) Beweisen Sie: Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, deren Taylorreihe um einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$ nicht null ist, dann kann x_0 nicht gleichzeitig ein Wendepunkt und ein isoliertes[1] lokales Maximum oder Minimum von f sein.

b) Das Resultat in Teil (a) geht auch mit schwächeren Annahmen. Beweisen Sie: Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und auf $(a, b) \setminus \{x_0\}$ auch zweimal differenzierbar, dann kann x_0 nicht gleichzeitig ein Wendepunkt und ein isoliertes Maximum oder Minimum von f sein.

c) Stimmt das Resultat in Teil (b) noch, wenn f in x_0 stetig aber nicht unbedingt differenzierbar sein muss? (Finden Sie ein Gegenbeispiel!)

Aufgabe 4.C
Finden Sie Beispiele von glatten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$ erfüllen aber auf keinem offenen Invervall um 0 konstant sind und auch die folgenden Eigenschaften haben: (i) f hat in 0 ein isoliertes lokales Maximum, oder (ii) f hat in 0 ein isoliertes lokales Minimum, oder (iii) f hat in 0 einen Wendepunkt.

---

[1] Zur Erinnerung: f hat in x_0 ein *isoliertes* lokales Maximum bzw. Minimum, falls $f(x) < f(x_0)$ bzw. $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \neq x_0$ ausreichend nahe an x_0 gilt. Fehlt das Wort "isoliert", dann muss f nur $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ erfüllen.