HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

**Analysis II***
**SoSe 2019**

# Übungsblatt 8 (kommentiert)

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 13. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

**Aufgabe 8.1** (5 Punkte)
Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Kugel mit Radius 1 um den Ursprung und $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ ein $C^\infty$-Diffeomorphismus ist.

*Kommentar: Es gibt hier drei Behauptungen, die in dieser Reihenfolge geklärt werden müssen: (1) $f$ ist bijektiv; (2) $f$ ist glatt; (3) $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to B_1(0)$ ist auch glatt. Konzentrieren wir uns hier auf Behauptungen (2) und (3). Die Funktion*

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

*ist ein Polynom und ist daher glatt. Die Funktion $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ist auch glatt, wie man induktiv beweisen kann, denn eine Funktion der Form $a(1 - x)^p$ auf $(0, 1)$ mit Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat immer eine Ableitung in der gleichen Form, nämlich $b(1 - x)^{p-1}$ für eine Konstante $b \in \mathbb{R}$. Die Verknüpfung*

$$h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}}$$

*ist also eine Verknüpfung glatter Funktionen, und daher glatt. (Hier wenden wir Aufgabe 6.3(c) wieder an, um zu folgern, dass Verknüpfungen von $C^k$-Funktionen auch in $C^k$ sind.) Nun ist $f$ das Produkt von dieser glatten reellwertigen Funktion mit der Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}^n$, die linear und deswegen ebenfalls glatt ist, also ist auch $f$ glatt. (Dahinter steckt noch ein Lemma: das Produkt zweier glatter Funktionen ist immer glatt. Das sieht man durch ein kleines Induktionsargument und die Produktregel $D(fg)(x)(h) = Df(x)h \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)h$, die wir mit $D(fg) = Df \cdot g + f \cdot Dg$ abkürzen werden. Wenn wir als Induktionsvoraussetzung*

$$f, g \in C^\infty \quad \Rightarrow \quad fg \in C^{k-1},$$

*annehmen, dann folgen $(Df)g \in C^{k-1}$ und $f \cdot Dg \in C^{k-1}$, da $Df$ und $Dg$ auch glatt sind, also gilt auch $D(fg) \in C^{k-1}$ und daher $fg \in C^k$.*
*Wenn wir schon wissen, dass $f$ bijektiv ist, dann folgt die glattheit von $f^{-1}$ nun vom Umkehrsatz, falls die Ableitung $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. Um diese Ableitung zu berechnen, fangen wir mit der Funktion $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ an, die für $x \in (0, 1)$*

$$h'(x) = \frac{1}{2(1 - x)^{3/2}}$$

*erfüllt. Der genauer Wert dieser Ableitung ist nicht besonders wichtig, aber wichtig ist, dass er immer positiv ist. Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ gilt $Dg(\mathbf{x})\mathbf{v} = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$, also laut Kettenregel*

$$D(h \circ g)(\mathbf{x})\mathbf{v} = Dh(\|\mathbf{x}\|^2) \circ Dg(\mathbf{x})\mathbf{v} = 2h'(\|\mathbf{x}\|^2)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle.$$

*Mit der Produktregel haben wir dann*

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = 2h'(\|\mathbf{x}\|^2)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{x} + \frac{1}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}}\mathbf{v}.$$

*Behauptung: diese Formel definiert für jedes $\mathbf{x} \in B_1(0)$ einen Isomorphismus $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Für $\mathbf{x} = 0$ sehen wir das sofort, denn $Df(0)\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Für $\mathbf{x} \neq 0$ sehen wir es am besten so: wähle eine Basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}$ und $\mathbf{v}_i$ orthogonal zu $\mathbf{x}$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Dann gilt*

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{v}_1 = \left(2h'(\|\mathbf{x}\|^2)\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}}\right)\mathbf{v}_1,$$

*wobei der Skalar in den Klammern positiv ist, und für $i = 2, \ldots, n$,*

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}}\mathbf{v}_i,$$

*da $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i\rangle = 0$. Damit gibt es für jedes $i = 1, \ldots, n$ eine positive Konstante $c_i > 0$, so dass $Df(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = c_i\mathbf{v}_i$ gilt. Das heißt, die Matrix der linearen Abbildung $Df(\mathbf{x}$ bzgl. der Basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ist diagonal und alle Eigenwerte sind positiv, also $Df(\mathbf{x})$ ist invertierbar.*
*Bemerkung: Diese Berechnung wird leichter, wenn man die Dinge etwas geometrischer betrachtet. Sei nämlich $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die $(n-1)$-dimensionale Sphäre $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = r\}$ von Radius $r > 0$; wir wissen vom Satz über implizite Funktionen, dass $S_r^{n-1}$ eine $(n-1)$-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann definiert $f$ eine Bijektion von $S_r^{n-1}$ nach $S_R^{n-1}$ für $R := \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$, und sie ist die einfachste mögliche Bijektion, denn es gibt eine Konstante $c > 0$, abhängig von $r$, so dass $f(\mathbf{x}) = c\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in S_r^{n-1}$. Der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}S_r^{n-1}$ ist das orthogonale Komplement des Vektors $\mathbf{x}$, und wir haben oben $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ als Basis davon gewählt. Dann kann man für jedes $i = 2, \ldots, n$ den Vektor $\mathbf{v}_i \in T_{\mathbf{x}}S_r^{n-1}$ als*

$$\mathbf{v}_i = \gamma_i'(0)$$

*realisieren, wobei $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ eine differentierbare Abbildung ist mit Bild in $S_r^{n-1}$ und $\gamma_i(0) = \mathbf{x}$. Da $\gamma_i(t)$ immer in $S_r^{n-1}$ liegt, haben wir dann $f \circ \gamma(t) = c\gamma(t) \in S_R^{n-1}$, also $Df(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = (f \circ \gamma)'(0)$ und dann genau das Gleiche wie $Df_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_i$ für die lineare Abbildung $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto c\mathbf{x}$. Jetzt muss $Df(\mathbf{x})$ nicht mehr ausgerechnet werden, denn es reicht, dass wir die Ableitung von $f_0$ schon kennen: die ist $Df_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = c\mathbf{v}_i$, womit die Formel $Df(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = c\mathbf{v}_i$ schon bewiesen ist. Für $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}$ kann man $\mathbf{v}_1$ als Ableitung eines radialen Pfads $\gamma_1(t) := (1+t)\mathbf{x}$ präsentieren und damit ähnlich beweisen, dass $Df(\mathbf{x})\mathbf{v}_1$ ein positives Vielfaches von $\mathbf{v}_1$ ist.*
*Der einzige Nachteil an diesem geometrischen Argument ist, dass es im Punkt $\mathbf{x} = 0$ ungültig ist, weil "die Sphäre von Radius 0" keine Untermannigfaltigkeit ist. Beim Punkt $\mathbf{x} = 0$ muss man die Ableitung von $f$ halt ausrechnen, aber auch das ist nicht schwierig, wenn man merkt: $f$ ist ein Produkt von zwei Funktionen, und eine davon verschwindet im Punkt $\mathbf{x} = 0$.*

**Aufgabe 8.2** (3 + 5 Punkte)

a) Sei $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $g(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann durch die Gleichung

$$xg(x) - yg(-y) = 0$$

in einer offenen Kugel um $x = 0$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 0$ bestimmt wird. Berechnen Sie $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ im Punkt $x = 0$.
*Hinweis: Die Funktion $f(x) := xg(x) - y(x)g(-y(x))$ hat $f'(0) = f''(0) = 0$. (Wieso?)*

*Kommentar: Die Funktion $F(x, y) := xg(x) - yg(-y)$ erfüllt im Punkt $(x_0, y_0) := (0, 0)$ die Voraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen, denn*

$$\begin{aligned} DF(0,0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) + xg'(x) & -g(-y) + yg'(-y) \end{pmatrix}\Big|_{x=y=0} \\ &= \begin{pmatrix} g(0) & -g(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

*und die 1-mal-1-Matrix $-g(0)$ is invertierbar. Damit wird eine $C^2$-Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 0$ für $x$ in einer Umgebung von 0 bestimmt, so dass $f(x) := F(x, y(x)) = 0$ gilt. Wegen der Kettenregel impliziert das*

$$0 = f'(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y'(0) = g(0) - g(0)y'(0),$$

*also $y'(0) = 1$. Eine ähnliche Berechnung von $f''(0) = 0$ führt zum Ergebnis $y''(0) = \frac{4g'(0)}{g(0)}$.*

b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + y_1^2 + y_2 &= 0, \\ -8x_1 + x_3^2 + y_1 &= 0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^* := (1, 1, -3)$ hat, und dass die Lösungsmenge in einer Umgebung von $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ als $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}\}$ beschrieben werden kann, wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $\mathbf{x}^*$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion ist.

*Kommentar: für $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -3)$ impliziert das Gleichungssystem $(y_1, y_2) = (-1, 0) =: \mathbf{y}^*$. Wir schreiben $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, und betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch*

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + x_2 + x_3 + y_1^2 + y_2, -8x_1 + x_3^2 + y_1).$$

*Die Jacobi-Matrix im Punkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ ist dann*

$$DF(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2y_1 & 1 \\ -8 & 0 & 2x_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Die $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, kann das Gleichungssystem in einer Umgebung von $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ nach $\mathbf{y}$ aufgelöst werden, also gibt es eine glatte Funktion (weil $F$ glatt ist) $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ mit $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^*$ und $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$.*

c) Für die Funktion $f$ in Teilaufgabe c), berechnen Sie die Matrix der linearen Abbildung $Df(\mathbf{x}^*) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

*Kommentar: Da $g(\mathbf{x}) := F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})$ konstant ist, gilt $Dg(\mathbf{x}^*) = 0$. Schreiben wir $g$ als Verknüpfung $F \circ h$, mit $h(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})$, also hat die Jacobi-Matrix von $h$ die Form*

$$Dh(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{3\times 3} \\ Df(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

*wobei der obige Block $\mathbb{1}_{3\times 3}$ die Jacobi-Matrix der Identitätsabbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ auf $\mathbb{R}^3$ ist, und der Block unten ist eine 2-mal-3 Matrix, die Jacobi-Matrix von $f$ in $\mathbf{x}$. Laut Kettenregel gilt dann*

$$0 = Dg(\mathbf{x}^*) = DF(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \circ Dh(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{3\times 3} \\ Df(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{3\times 3} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Df(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Df(\mathbf{x}^*),$$

*also*

$$Df(\mathbf{x}^*) = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 15 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 8.3** (4 + 2 Punkte)
Seien $m \geq 0$, $n \geq m$ und $k \geq 1$ ganze Zahlen. Die folgenden Begriffe wurden in der Vorlesung definiert: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine **$C^k$-Untermannigfaltigkeit** von Dimension $m$ in $\mathbb{R}^n$, falls zu jedem Punkt $p \in M$ offene Mengen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in \mathcal{U}$ und ein $C^k$-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ zugeordnet werden kann, so dass[1]

$$x \in M \cap \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Für eine gegebene $C^k$-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $p \in M$ wird der **Tangentialraum** $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ als die Menge aller Vektoren $X \in \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft definiert: es existiert $\epsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$, und $\gamma(t) \in M$ für alle $t$.

a) Beweisen Sie: für jeden Punkt $p$ in einer $m$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist $T_pM$ ein $m$-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
*Hinweis: Im Spezialfall $M = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gilt $T_pM = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ für alle $p$. Für den $C^k$-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ in der Definition oben ist $D\varphi(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. (Warum?)*

*Kommentar: Natürlich ist $D\varphi(p)$ deswegen ein Isomorphismus, weil $\varphi^{-1}$ existiert und auch differenzierbar ist, mit $D\varphi^{-1}(\varphi(p)) = [D\varphi(p)]^{-1}$. Per Definition ist ein Vektor $X \in \mathbb{R}^n$ genau dann in $T_pM$, wenn $X = \gamma'(0)$ für eine Abbildung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$. Wir dürfen hier $\epsilon > 0$ wenn nötig verkleinern, um o.B.d.A. anzunehmen, dass das Bild von $\gamma$ in der Umgebung $\mathcal{U}$ von $p$ ist. Dann ist $\varphi \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung mit Bild in $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi \circ \gamma(0) = \varphi(p)$, also gilt*

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = D\varphi(p)X \in T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

*das heißt, $D\varphi(p)$ bildet $T_pM$ nach $T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ ab. Da $\varphi$ ein Diffeomorphismus ist, zeigt dieses Argument auch, dass $D\varphi(p)$ einen Isomorphismus von $T_pM$ nach $T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ definiert. Wie im Hinweis erwähnt, kann man leicht zeigen, dass $T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ der Unterraum $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ ist, und $T_pM$ ist nun das Bild dieses Raumes durch einen linearen Isomorphismus, also folgt, dass $T_pM$ auch ein $m$-dimensionaler linearer Unterraum ist.*

b) Früher im Semester wurde der Begriff *Tangentialraum* auch für beliebige Niveauflächen $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ definiert, die nicht unbedingt Untermannigfaltigkeiten sein müssen.

[1] Hier bezeichnet $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ der Raum aller Vektoren der Form $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Betrachten Sie insb. die Höhenlinie $M := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ für $f(x, y) := x^2 - y^2$, und beschreiben Sie die Menge $T_{(0,0)}M \subset \mathbb{R}^2$. Ist diese Menge ein linearer Unterraum?

*Kommentar: $T_{(0,0)}M$ ist die Vereinigung der zwei 1-dimensionalen linearen Unterräume erzeugt durch die Vektoren $(1, 1)$ und $(1, -1)$. Diese Vereinigung ist aber kein Vektorraum; wenn es das wäre, dann müsste es ganz $\mathbb{R}^2$ sein, weil es die linear unabhängigen Vektoren $(1, 1)$ und $(1, -1)$ enthählt, aber z.B. $(1, 0)$ liegt nicht in $T_{(0,0)}M$.*

*Die Botschaft dieser Aufgabe soll sein: der Begriff "Tangentialraum" ist eigentlich nur bei Untermannigfaltigkeiten sinnvoll, denn bei allgemeineren Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es in der Regel keine schöne Beschreibung davon, wie $T_pM$ aussehen soll.*

**Aufgabe 8.4** (*Der Rotationstorus*) (2 + 2 + 2 Punkte)
Für gegebene Konstanten $R > r > 0$ betrachten wir die Menge

$$\mathbb{T}^2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2 \right\}.$$

a) Skizzieren Sie $\mathbb{T}^2$.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{T}^2$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Finden Sie die Menge aller Punkte $p \in \mathbb{T}^2$ mit der Eigenschaft, dass der Tangentialraum $T_p\mathbb{T}^2$ die $xy$-Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist.

*Kommentar: Man findet schnell ein passendes Bild von $\mathbb{T}^2$, wenn man einfach nach "Torus" in Google-Images sucht. Rechnet man den Gradienten der glatten Funktion $f(x, y, z) := z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2$ aus, findet man, dass es in Punkten mit $f(x, y, z) > 0$ nie verschwindet, also ist $Df(x, y, z)$ in diesen Punkten immer surjektiv, und folglich ist jedes $r^2 > 0$ ein regulärer Wert von $f$. Der Satz über implizite Funktionen sagt dann, dass $f^{-1}(r^2)$ eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit ist. In jedem Punkt $p \in \mathbb{T}^2$ ist $T_p\mathbb{T}^2$ dann das orthogonale Komplement vom Gradienten $\nabla f(x, y, z)$; die Punkte, wo $T_p\mathbb{T}^2$ die $xy$-Ebene ist, sind also die Punkte, wo $\nabla f(x, y, z)$ in die $z$-Richtung deutet, d.h. wo $\partial_x f$ und $\partial_y f$ beide verschwinden. Diese sind genau die zwei Kreise $\{z = \pm r,\ x^2 + y^2 = R^2\}$.*

Insgesamt: **25 Punkte**

**Schriftliche Zusatzaufgabe 8.Z** (4 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Funktion $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ heißt **$C^k$-Immersion**, falls für jedes $x \in \mathcal{U}$, $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Beweisen Sie, dass alle Immersionen $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ "lokal injektiv" sind, d.h. jedes $x \in \mathcal{U}$ hat eine Umgebung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, so dass $f|_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist.
*Hinweis: Dies folgt direkt vom Umkehrsatz im Fall $m = n$. Im Fall, $n > m$, basteln Sie aus $f$ eine neue Funktion, für die der Umkehrsatz im Punkt $x \in \mathcal{U}$ gilt.*

*Kommentar: Betrachten wir den Fall $n > m$, also $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv aber nicht surjektiv. Es gibt dann einen $(n - m)$-dimensionalen linearen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{R}^n = \operatorname{im} Df(x) \oplus V$, d.h. jedes $X \in \mathbb{R}^n$ kann als Summe $Df(x)w + v$ für eindeutige Vektoren $w \in \mathbb{R}^m$ und $v \in V$ geschrieben werden, und insb. ist die Schnittmenge $\operatorname{im} Df(x) \cap V$ trivial. Wähle eine injektive lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ aus, deren Bild der Unterraum $V$ ist. Dann können wir die Funktion*

$$F : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n : (x, v) \mapsto f(x) + \Phi(v)$$

*betrachten. Ihre Jacobi-Matrix $DF(x)$ lässt sich in Blöcken $\begin{pmatrix} Df(x) & \Phi \end{pmatrix}$ zerteilen, d.h. $DF(x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ hat die Form*

$$DF(x)(w, v) = Df(x)(w) + \Phi v.$$

*Diese Abbildung ist injectiv, denn $\operatorname{im} Df(x) \cap \operatorname{im} \Phi = \{0\}$, und weil $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbb{R}^n$ die gleiche Dimension haben, ist sie daher auch surjektiv. Laut Umkehrsatz gibt es dann eine Umgebung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{n-m}$ von $(x, 0)$, auf der $F$ injektiv ist. Da $F(x, 0) = f(x)$, folgt, dass $f$ auf der offenen Umgebung $\{y \in \mathcal{U} \mid (y, 0) \in \mathcal{U}'\}$ auch injektiv ist.*

---

*Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.*

**Aufgabe 8.A**

a) Zeigen Sie, dass man die Lösungsmenge der Gleichung $ye^{xy} - 1 = 0$ in einer Umgebung des Punktes $p = (0, 1)$ als Graph einer glatten Funktion $y = \varphi(x)$ mit $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $\varphi(0) = 1$ beschreiben kann.

b) Zeigen Sie: das 2. Taylorpolynom der Funktion $\varphi$ von Teilaufgabe a) um den Entwicklungspunkt $x = 0$ ist $1 - x + \frac{3}{2}x^2$.

**Aufgabe 8.B**
Wir betrachten die Gleichung $f(x, y, z) := y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$. Der Punkt $(0, e, 2)$ liegt offensichtlich in der Lösungsmenge der Gleichung.

a) Zeigen Sie, dass man die Gleichung in einer Umgebung von $(0, e, 2)$ nach der $z$-Variablen auflösen kann.

b) Zeigen Sie $z = h(x, y)$ eine solche Auflösung. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x h(0, e)$ und $\partial_y h(0, e)$.