HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*
SoSe 2019

Übungsblatt 9 (kommentiert)

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 20. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 9.1 (2 + 3 Punkte)
Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8\}$.

a) Beweisen Sie: K ist eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Kommenar: Für $g(x, y) := 5x^2 + 6xy + 5y^2$ verschwindet $\nabla g(x, y) = (10x + 6y, 6x + 10y)$ nur, wenn $(x, y) = (0, 0)$, und dieser Punkt liegt nicht in der Menge M, also ist jedes $(x, y) \in M$ ein regulärer Punkt von g und M ist deswegen (laut dem Satz über implizite Funktionen) eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Kompaktheit folgt davon, dass M auch abgeschlossen und beschränkt ist. Um beschränkt zu beweisen, kann man z.B.

$$8 = g(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 = \left(\sqrt{3}x + \sqrt{3}y\right)^2 + 2(x^2 + y^2) \geq 2(x^2 + y^2)$$

schreiben, d.h. M liegt in der abgeschlossenen Kugel von Radius 2 um 0.

b) Finden Sie die Punkte auf K, die den grössten bzw. den kleinsten Abstand vom Ursprung haben.

Kommentar: Wir suchen nach Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ eingeschränkt auf M. Wenn f einen Extremwert im Punkt $(x, y) \in M$ annimmt, muss das Gleichungssystem

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x &= \lambda(10x + 6y), \\ 2y &= \lambda(6x + 10y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (10\lambda - 2)x + 6\lambda y &= 0, \\ 6\lambda x + (10\lambda - 2)y &= 0 \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt werden. Hier darf (x, y) nicht $(0, 0)$ sein, denn $(0, 0) \notin M$, also dieses Gleichungssystem hat eine Lösung nur dann, wenn

$$0 = \det \begin{pmatrix} 10\lambda - 2 & 6\lambda \\ 6\lambda & 10\lambda - 2 \end{pmatrix} = (10\lambda - 2)^2 - 36\lambda^2 = 64\lambda^2 - 40\lambda + 4 = 4(8\lambda - 1)(2\lambda - 1),$$

also λ ist entweder $1/8$ oder $1/2$. Im Fall $\lambda = 1/8$ impliziert das Gleichungssystem $x = y$, also

$$g(x, y) = 5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 16x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Im Fall $\lambda = 1/2$ gilt stattdessen $x = -y$, also

$$g(x, y) = 5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 4x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}).$$

Wir sehen, dass die zwei Punkte $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) \in M$ den kleinsten Abstand zum Ursprung haben, und $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) \in M$ haben den grössten Abstand.

Aufgabe 9.2 (2 + 3 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Schnittmenge der Mengen $\{x + y + z = 0\}$ und $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass M eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.[1]

Kommentar: Wir schreiben $g = (g_1, g_2)$ mit $g_1(x, y, z) = x + y + z$ und $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Die Gleichung $g_2(x, y, z) = 1$ impliziert, dass M beschränkt ist, und es ist auch abgeschlossen, also kompakt. Laut dem Satz über implizite Funktionen ist M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, falls für alle $(x, y, z) \in M$ das Differential $Dg(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ surjektiv ist. Letzteres ist äquivalent zur Bedingung, dass die zwei Gradienten $\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1)$ und $\nabla g_2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ linear unabhängig sind. Die einzigen Punkte, wo das nicht gilt, sind Punkte der Form $(x, x, x) \in \mathbb{R}^3$ für $x \in \mathbb{R}$, aber $g_1(x, y, z) = 0$ impliziert dann $x = 0$, und $g_2(x, y, z) = 1$ kann also nicht gleichzeitig erfüllt werden.

b) Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf M.

Kommentar: Wir suchen nach Punkte $(x, y, z) \in M$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x, y, z) = (5, 1, -3) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2x, 2y, 2z),$$

also

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 x &= 5, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 y &= 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 z &= -3. \end{aligned} \tag{1}$$

An dieser Stelle müssen wir ein bisschen improvisieren. Eine gültige Lösung muss auch die zwei Gleichungen $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erfüllen, also durch addieren der drei Gleichungen in (1) erhählt man

$$3\lambda_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,$$

und die drei Gleichungen in (1) können jetzt so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 x &= 4, \\ 2\lambda_2 y &= 0, \\ 2\lambda_2 z &= -4. \end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung wissen wir $\lambda_2 \neq 0$, also impliziert die zweite Gleichung $y = 0$. Es folgt $x + z = 0$ und $x^2 + z^2 = 1$, also $x = \pm 1/\sqrt{2}$ und $z = \mp 1/\sqrt{2}$. Damit haben wir das Minimum und das Maximum gefunden:

$$f(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = -\frac{8}{\sqrt{2}}, \qquad f(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 9.3 (3 Punkte)
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle, symmetrische $(n \times n)$-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$. Wir betrachten die Einschränkung von f auf die kompakte Einheitssphäre $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf S^{n-1}, in denen $f|_{S^{n-1}}$:

[1] In der Sprache von Aufgabe 9.Z könnte man hier sagen: die Ebene $\{x + y + z = 0\}$ und die Sphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sind zwei 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, die sich transversal schneiden, also ist ihre Schnittmenge auch eine Untermannigfaltigkeit.

$S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ein globales Maximum bzw. ein globales Minimum annimmt. Was hat die Antwort mit Eigenvektoren und Eigenwerten zu tun?
Da $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, kann man mittels Produktregel für bilineare Abbildung den Gradienten von f berechnen:

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{v}\rangle = 2\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x},$$

Die Funktion $g(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ mit $S^{n-1} = g^{-1}(1)$ ist dann ein Spezialfall und erfüllt $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$. Die Gleichung

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

wird also die Aussage, dass $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ mit Eigenwert λ ist, und für $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ haben wir dann auch $f(\mathbf{x}) = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda$. Die Funktion f hat also ein globales Maximum bzw. Minimum in allen Einheitsvektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ mit dem grössten bzw. kleinsten möglichen Eigenwert sind.

Aufgabe 9.4 (2 + 2 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $g = (g_1, \ldots, g_m) \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ Funktionen, $q \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von g mit Niveaufläche $M := g^{-1}(q)$, und $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ eine 2-fach stetig differenzierbare Abbildung mit $\gamma(t) \in M$ für alle t. Wir bezeichnen $p := \gamma(0) \in M$ und $X := \gamma'(0) \in T_pM$.

a) Beweisen Sie: Für alle $i = 1, \ldots, m$ gilt $\langle \nabla g_i, \gamma''(0)\rangle = -\langle Hg_i(p)X, X\rangle$.[2]
Hinweis: Betrachten Sie zuerst eine beliebige Funktion $h \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und beweisen Sie eine allgemeine Formel für $(h \circ \gamma)''(0)$.

Kommentar: Die im Hinweis erwähnte Formel ist (vgl. Aufgabe 7.2)

$$(h \circ \gamma)''(0) = \langle Hh(p)X, X\rangle + \langle \nabla h(p), \gamma''(0)\rangle.$$

Da $g \circ \gamma(t) = q$ eine konstante Funktion von t ist, gilt dann $0 = (g_i \circ \gamma)''(0) = \langle Hg_i(p)X, X\rangle + \langle \nabla g_i(p), \gamma''(0)\rangle$.

b) Aus der Vorlesung wissen wir: nimmt die eingeschränkte Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ im Punkt p ein lokales Maximum an, dann existieren eindeutige Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, die sogenannten Lagrange-Multiplikatoren, so dass die Gleichung

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(p)$$

erfüllt wird. Beweisen Sie, dass in diesem Fall die Matrix $A := Hf(p) - \sum_{i=1}^m \lambda_i Hg_i(p)$ die Ungleichung $\langle AX, X\rangle \leq 0$ für alle $X \in T_pM$ erfüllen muss.

Dass $f|_M : M \to \mathbb{R}$ ein lokales Maximum in p annimmt, impliziert, dass $f \circ \gamma(t)$ ebenfalls ein lokales Maximum im Punkt $t = 0$ hat, also müssen $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ und $(f \circ \gamma)''(0) \leq 0$ gelten. Wegen der Formel in Teilaufgabe a) gilt

$$0 \geq (f \circ \gamma)''(0) = \langle Hf(p)X, X\rangle + \langle \nabla f(p), \gamma''(0)\rangle = \langle Hf(p)X, X\rangle + \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle \nabla g_i(p), \gamma''(0)\rangle$$

$$= \langle Hf(p)X, X\rangle - \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle Hg_i(p)X, X\rangle = \left\langle \left(Hf(p) - \sum_{i=1}^m \lambda_i Hg_i(p)\right) X, X \right\rangle.$$

Da $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ beliebig war, gilt diese Ungleichung dann für alle $X \in T_pM$.

[2] Wie immer bezeichnen wir mit $Hf(p)$ die Hesse-Matrix einer reellwertigen Funktion f im Punkt p.

Aufgabe 9.5 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Antwort: $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+c$. *(Substitution:* $u=1+x^2$*)*

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Antwort: $-\frac{\ln x+1}{x}+c$. *(Partielle Integration:* $\ln x\cdot\frac{d}{dx}(-1/x)$*)*

c) $\displaystyle\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ auf dem Intervall $(-r,r)$ für $r>0$

Antwort: $\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)+c$. *(Substitution* $x=r\sin\theta$*, dann partielle Integration, um* $\int\cos^2\theta\,d\theta$ *zu berechnen)*

d) $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^2+x-6}$

Antwort: $\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+c$. *(Partialbruchzerlegung)*

e) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$; *Hinweis: Nach einer Substitution wird die Funktion rational.*

Antwort: $-x+2\ln(e^x+1)+c$. *(Substitution* $u=e^x$*, dann Partialbruchzerlegung)*

Insgesamt: **27 Punkte**

Aufgabe 9.Z (2 + 2 + 1 Punkte)
Seien M und N zwei Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. Wir sagen: M und N schneiden sich *transversal*, falls für alle Punkte $p\in M\cap N$, $T_pM+T_pN=\mathbb{R}^n$, d.h. jeder Vektor $X\in\mathbb{R}^n$ kann (nicht unbedingt eindeutig) als $X=v+w$ für $v\in T_pM$ und $w\in T_pN$ geschrieben werden. Im Folgenden wird angenommen, dass M und N als Niveauflächen $M=f^{-1}(a)$ und $N=g^{-1}(b)$ gegeben sind, wobei

$$f=(f_1,\dots,f_m)\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)\quad\text{und}\quad g=(g_1,\dots,g_\ell)\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^\ell)$$

Funktionen mit regulären Werten $a\in\mathbb{R}^m$ bzw. $b\in\mathbb{R}^\ell$ sind.

a) Beweisen Sie, dass die Bedingung $T_pM+T_pN=\mathbb{R}^n$ für einen Schnittpunkt $p\in M\cap N$ genau dann gilt, wenn die Vektoren $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_m(p),\nabla g_1(p),\dots,\nabla g_\ell(p)$ linear unabhängig sind.

Kommentar: Das orthogonale Komplement von T_pM *ist der Vektorraum aufgespannt durch die Vektoren* $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_m(p)$*, die alle linear unabhängig sind, da* p *ein regulärer Punkt von* f *ist. Eine ähnliche Aussage gilt für* T_pN*. Die Bedingung* $T_pM+T_pN=\mathbb{R}^n$ *versagt genau dann, wenn ein nichttrivialer Vektor* $v\in\mathbb{R}^n$ *existiert, der orthogonal zu* T_pM+T_pN *ist, was heißt,* v *ist orthogonal zu* T_pM *und auch orthogonal zu* T_pN*. Die erste Bedingung impliziert, dass* v *eine lineare Kombination der Vektoren* $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_m(p)$ *ist, und die zweite Bedingung, dass* v *auch eine lineare Kombination der Vektoren* $\nabla g_1(p),\dots,\nabla g_\ell(p)$ *ist. Dies kann nur so sein, wenn* $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_m(p)$ *und* $\nabla g_1(p),\dots,\nabla g_\ell(p)$ *linear abhängig sind.*

b) Beweisen Sie: Falls M und N sich transversal schneiden, dann ist auch $M \cap N$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Was ist die Dimension von $M \cap N$?

Kommentar: Angesichts Teilaufgabe a) heißt Transversalität im Punkt $p \in M \cap N$, dass p ein regulärer Punkt der Funktion $(f, g) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{m+\ell}$ ist, also folgt vom Satz über implizite Funktionen, dass $M \cap N = f^{-1}(a) \cap g^{-1}(b) = (f, g)^{-1}(a, b)$ eine Untermannigfaltigkeit ist von Kodimension $m + \ell$ ist. Die Dimension von $M \cap N$ ist also $n - (m + \ell)$.

c) Welche Bedeutung hat das Resultat von Teilaufgabe b) im Fall $m + \ell > n$?

Kommentar: In diesem Fall gilt $\dim(M \cap N) < 0$, was natürlich Unsinn ist, es sei denn, $M \cap N = \emptyset$. Tatsähclich ist es jetzt so, dass die Bedingung $T_pM + T_pN = \mathbb{R}^n$ für einen Punkt $p \in M \cap N$ nicht erfüllt werden kann, denn die Dimensionen von T_pM und T_pN sind zu klein dafür: sie sind nämlich $n - m$ bzw. $n - \ell$, also gilt $n - m + n - \ell = 2n - (m + \ell) < 2n - n = \dim \mathbb{R}^n$. Das bedeutet nicht, dass M und N sich nicht transversal schneiden können, sondern, dass $M \cap N$ keine Punkte enthalten kann.

Hier ein praktisches Beispiel: der Flug eines Flugzeugs parametrisiert einen Pfad im Vektorraum $\mathbb{R}^4$, den wir als die drei räumlichen Dimensionen plus Zeit als vierte Dimension verstehen können. Wenn sich zwei solche Pfade kreuzen, dann stürzen zwei Flugzeuge in der Luft zusammen. Aber das passiert fast nie. Der Grund ist: die Pfade sind 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^4$, und in der generischen Situation sind zwei solche Untermannigfaltigkeiten zueinander transversal. Da $1+1 < 4$, heißt das, dass die Pfade sich nie schneiden. (Hier sieht man, dass wir mit dem Flugverkehr ein echtes Problem hätten, würden wir in einem 1-dimensionalen Raum leben.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 9.A

Seien $f, g : (0, \infty)^n \to \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \qquad g(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \ldots + x_n.$$

a) Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

b) Beweisen Sie damit für alle $y_i > 0$ die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*: $(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)^{1/n} \leq \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

Aufgabe 9.B

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale: $\int x^2 e^x \, dx$; $\int x^2 4^x \, dx$; $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$; $\int \frac{x \, dx}{x^2 - 4x + 3}$; $\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$; $\int \frac{x^7}{x^4 + 2} \, dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$; $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \, dx$.

Antworten:

- $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$
- $\displaystyle\int x^2 4^x \, dx = \frac{(\ln 4)^2 x^2 4^x - 2 \ln 4 \cdot x \cdot 4^x + 2 \cdot 4^x}{(\ln 4)^3} + c$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$
- $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$
- $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx = 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + c$
- $\displaystyle\int \frac{x^7}{x^4+2}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^4+2) + c$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \frac{1}{\tan x} + c$
- $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x}+1) + c$