Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 11: Musterlösung zu den Aufgaben 11.1, 11.3, 11.4, 11.A und 11.B

Aufgabe 11.1 (3 + 3 Punkte)
Man definiert **Kugelkoordinaten** (r, θ, ϕ) im 3-dimensionalen Euklidischen Raum durch die Transformation[1]

$$(r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z), \qquad \begin{cases} x := r\cos\theta\cos\phi, \\ y := r\sin\theta\cos\phi, \\ z := r\sin\phi. \end{cases} \tag{1}$$

a) Finden Sie ein offenenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^3$, so dass (1) einen C^1-Diffeomorphismus $(0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 \setminus N$ definiert.

Lösung:
Sei $I := (0, 2\pi)$. Die Transformation ist dann eine glatte und bijektive Abbildung nach $\mathbb{R}^3 \setminus N$, mit

$$N := \left\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dies ist eine Teilmenge des linearen Unterraums $V := \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, die eine Nullmenge ist, da $\dim V = 2 < 3$, so ist auch N eine Nullmenge in $\mathbb{R}^3$. Es gibt auch weitere Möglichkeiten für I, nämlich jedes Intervall der Form $(c, c + 2\pi)$ für $c \in \mathbb{R}$; die Menge N ist dann weniger einfach zu beschreiben, ist aber immer noch eine Teilmenge eines linearen Unterraums von Dimension 2 und daher eine Nullmenge. Eine beliebte Option ist $I := (-\pi, \pi)$, denn N wird dann die Menge $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$.
Um zu beweisen, dass die Transformation tatsächlich ein Diffeomorphismus ist, berechnen wir ihre Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für jedes $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ invertierbar, denn

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right) &= r^2\cos^2\theta\cos^3\phi + r^2\sin^2\theta\cos\phi\sin^2\phi \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi\cos\phi + r^2\sin^2\theta\cos^3\phi \\ &= r^2\left[(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos^3\phi + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\cos\phi\sin^2\phi\right] \\ &= r^2\left(\cos^3\phi + \cos\phi\sin^2\phi\right) = r^2\cos\phi\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = r^2\cos\phi > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Es folgt also vom Umkehrsatz, dass die Umkehrabbildung auch glatt ist.

[1] Achtung: für die Definition der Transformation (1) gibt es verschiedene Konventionen. Besonders unter Physikern wird die Variante $x := r\cos\phi\sin\theta$, $y := r\sin\phi\sin\theta$, $z := r\cos\theta$ mit $\theta \in (0, \pi)$ oft verwendet.

b) Für eine gegebene messbare Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, sei $F : \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ definiert durch $F(x,y,z) := f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)$. Was ist $\int_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$? Schreiben Sie die Antwort als Integral einer Funktion auf $[0,\infty)$, die aus f gebaut wird.

Lösung:
Wir verwenden die Kugelkoordinaten $(r,\theta,\phi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (-\pi/2,\pi/2)$ aus Teilaufgabe (a) und schreiben die Transformation $(r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z)$ als

$$\psi : \mathcal{U} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3 \setminus N$$

mit $\mathcal{U} := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (-\pi/2,\pi/2) \subset \mathbb{R}^3$. Da $N \subset \mathbb{R}^3$ eine Nullmenge ist, impliziert die Transformationsformel dann

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\psi(\mathcal{U})} F\,dm = \int_{\mathcal{U}} (F \circ \psi)\,|\mathrm{Det}\,D\psi|\;dm,$$

wobei $F \circ \psi(r,\theta,\phi) = f(r)$, und die Jacobi-Determinante wurde in (2) berechnet, also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)} f(r)\left|\mathrm{Det}\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right)\right|\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)} f(r) r^2 \cos\phi\;dr\,d\theta\,d\phi.\end{aligned}$$

Da $(r,\theta,\phi) \mapsto r^2 f(r)\cos\phi$ eine nichtnegative messbare Funktion auf $(0,\infty) \times (0,2\pi) \times (-\pi/2,\pi/2)$ ist, können wir jetzt den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)} f(r) r^2 \cos\phi\;dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^2 f(r)\cos\phi\,d\theta\right) d\phi\right) dr \\ &= \int_0^\infty r^2 f(r) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) d\phi\right) dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 f(r) \left(\sin\phi\Big|_{\phi=-\pi/2}^{\phi=\pi/2}\right) dr = 4\pi \int_0^\infty r^2 f(r)\,dr.\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3 (3 + 2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert in Polarkoordinaten (r,θ) durch $(r,\theta) \mapsto (r,2\theta)$, d.h. für $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ sind $(r,2\theta)$ die Polarkoordinaten des Punktes $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

a) Beweisen Sie: φ ist stetig differenzierbar und $\mathrm{Det}\,D\varphi(x,y) = 2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Hinweis: Kettenregel.

Lösung:
Laut Beobachtungen der Korrektoren hat niemand so richtig verstanden, wie der Hinweis "Kettenregel" helfen sollte, aber es ist in dieser Aufgabe wirklich *nicht* nötig (und macht außerdem keinen Spaß), die Jacobi-Matrix von φ als Funktion der Variablen (x,y) explizit zu berechnen.

Die Polarkoordinaten bestimmen für eine beliebige Konstante $\kappa \in \mathbb{R}$ einen glatten Diffeomorphismus

$$f_\kappa : (0,\infty) \times (\kappa, \kappa + 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \ell_\kappa, \qquad f_\kappa(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

wobei $\ell_\kappa \subset \mathbb{R}^2$ die Menge

$$\ell_\kappa := \left\{ (\rho\cos\kappa, \rho\sin\kappa) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \rho > 0 \right\}$$

bezeichnet. Es ist klar, dass diese Transformation glatt und bijektiv ist; dass sie auch ein Diffeomorphismus ist, folgt vom Umkehrsatz, weil die Jacobimatrix

$$Df_\kappa(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix} \tag{3}$$

für jedes $(r,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ Determinante $r \neq 0$ hat. Für einen gegebenen Punkt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wählen wir nun eine kleine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von (x_0,y_0) und ein $\kappa \in \mathbb{R}$, so dass

$$(x_0,y_0) \in \mathcal{U} \Subset \mathbb{R}^2 \setminus \ell_\kappa,$$

und bezeichnen mit $(r_0,\theta_0) \in (0,\infty) \times (\kappa, \kappa+2\pi)$ die entsprechenden Polarkoordinaten von (x_0,y_0), d.h.

$$(x_0,y_0) = f_\kappa(r_0,\theta_0).$$

Konkreter wird z.B. die folgende Wahl von κ und $\mathcal{U}$ reichen: sei $\kappa := \theta_0 - \pi$ und $\mathcal{U} := f_\kappa((r_0/2, 3r_0/2) \times (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2)$; dann ist $\mathcal{U}$ offen, weil $(r_0/2, 3r_0/2) \times (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2) \subset (0,\infty) \times (\kappa, \kappa+2\pi)$ offen und $f_\kappa^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \ell_\kappa \to (0,\infty) \times (\kappa, \kappa + 2\pi)$ stetig ist. Das Bild von $(r_0/2, 3r_0/2) \times (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2)$ unter der Abbildung

$$g : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to (0,\infty) \times \mathbb{R}, \qquad g(r,\theta) := (r, 2\theta)$$

ist jetzt $(r_0/2, 3r_0/2) \times (2\theta_0 - \pi, 2\theta_0 + \pi)$ und ist also enthalten in $f_{\kappa'}^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \ell_{\kappa'})$ für

$$\kappa' := 2\theta_0 - \pi.$$

Nach diesen Betrachtungen können wir nun φ auf der Umgebung $\mathcal{U}$ in der Form

$$\varphi|_{\mathcal{U}} = f_{\kappa'} \circ g \circ f_\kappa^{-1}|_{\mathcal{U}}$$

schreiben. Als Verknüpfung von drei glatten Abbildungen ist $\varphi|_{\mathcal{U}}$ selbstverständlich glatt und daher stetig differenzierbar, und da wir das jetzt für eine Umgebung $\mathcal{U}$ eines *beliebigen* Punktes $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bewiesen haben, folgt, dass φ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ glatt ist. Die Determinante der Jacobimatrix $D\varphi(x_0,y_0)$ können wir nun durch die Kettenregel berechnen, denn $D\varphi(x_0,y_0)$ ist eine Verknüpfung von drei linearen Abbildungen, oder äquivalenterweise, ein Produkt von drei Matrizen:

$$\begin{aligned} D\varphi(x_0,y_0) &= Df_{\kappa'}(r_0, 2\theta_0) \circ Dg(r_0,\theta_0) \circ Df_\kappa^{-1}(x_0,y_0) \\ &= Df_{\kappa'}(r_0, 2\theta_0) \circ Dg(r_0,\theta_0) \circ [Df_\kappa(r_0,\theta_0)]^{-1}. \end{aligned}$$

Nach (3) gilt

$$\operatorname{Det} Df_\kappa(r_0,\theta_0) = \operatorname{Det} Df_{\kappa'}(r_0, 2\theta_0) = r_0, \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Det} Dg(r_0,\theta_0) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Die allgemeine Formel $\operatorname{Det}(\mathbf{AB}) = \operatorname{Det}(\mathbf{A}) \cdot \operatorname{Det}(\mathbf{B})$ impliziert jetzt $\operatorname{Det} D\varphi(x_0,y_0) = r_0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{r_0} = 2$.

b) Finden Sie eine integrierbare Funktion f auf der offenen Menge $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|\mathbf{x}\| < 1\}$, für die die Formel $\int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi)\,|\mathrm{Det}\, D\varphi|\ dm = \int_{\varphi(\mathcal{U})} f\, dm$ falsch ist. Welche Voraussetzung in der gewöhnlichen Transformationsformel wird hier nicht erfüllt?

Lösung:
Es gilt $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, und als Teilmenge der Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ hat $\mathcal{U}$ auch endliches Lebesgue-Maß. Weil $\mathrm{Det}\, D\varphi \equiv 2$ gilt dann für die Konstante Funktion $f := 1$,

$$2m(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} 2\, dm = \int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi)|\,\mathrm{Det}\, D\varphi|\, dm \neq \int_{\varphi(\mathcal{U})} f\, dm = \int_{\mathcal{U}} 1\, dm = m(\mathcal{U}).$$

Das Problem hier ist, dass die Abbildung $\mathcal{U} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{U}$ kein C^1-Diffeomorphismus ist; sie ist zwar von der Klasse C^1 und ist ein *lokaler* Diffeomorphismus, ist aber nicht bijektiv, denn für jeden Punkt $p \in \mathcal{U}$ besteht das Urbild $\varphi^{-1}(p)$ aus genau *zwei* Punkten in $\mathcal{U}$.

Aufgabe 11.4 (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dm = 1$, und für $\epsilon > 0$, definiere $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ durch $f_\epsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\epsilon^n} f(\mathbf{x}/\epsilon)$. Zeigen Sie: für jede stetige und beschränkte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon \varphi\, dm = \varphi(0).$$

Hinweis: Transformieren Sie das Integral durch $\mathbf{x} \mapsto \epsilon\mathbf{x}$.

Lösung:
Wir substituieren $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\epsilon$, d.h. wir wenden die Transformationsformel mit dem glatten Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} := \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}$ an. Die Determinante der Jacobimatrix $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} := D\mathbf{u}(\mathbf{x})$ dieser Transformation ist

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1/\epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\epsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon^n},$$

also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, d^n x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}/\epsilon)\varphi(\mathbf{x})\frac{1}{\epsilon^n}\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\varphi\big(\epsilon\mathbf{u}(\mathbf{x})\big) \cdot \left|\mathrm{Det}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)\right|\, d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})\varphi(\epsilon\mathbf{u})\, d^n u. \end{aligned}$$

Es genügt jetzt zu zeigen, dass für eine beliebige Folge $\epsilon_k > 0$ mit $\epsilon_k \to 0$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})\varphi(\epsilon_k\mathbf{u})\, d^n u = \varphi(0).$$

Per Annahme ist φ stetig und beschränkt, also die Funktion $F_k(\mathbf{u}) := f(\mathbf{u})\varphi(\epsilon_k\mathbf{u})$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}^n$ gegen $F_\infty(\mathbf{u}) := f(\mathbf{u})\varphi(0)$, und F_k erfüllt außerdem die Schranke

$$|F_k| \le \sup|\varphi| \cdot f,$$

wobei die rechte Seite eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist. Der Lebesguesche Konvergenzsatz impliziert also,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})\varphi(\epsilon_k\mathbf{u})\, d^n u \to \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})\varphi(0)\, d^n u = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} f\, dm = \varphi(0).$$

Aufgabe 11.A
Eine n-dimensionale Verallgemeinerung der Kugelkoordinaten in Aufgabe 11.1 ist die Transformation

$$(r, \theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n), \qquad \begin{cases} x_1 &= r \cos\theta \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ x_2 &= r \sin\theta \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ x_3 &= r \sin\phi_1 \cos\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ x_4 &= r \sin\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ & \vdots \\ x_{n-2} &= r \sin\phi_{n-4} \cos\phi_{n-3} \cos\phi_{n-2}, \\ x_{n-1} &= r \sin\phi_{n-3} \cos\phi_{n-2}, \\ x_n &= r \sin\phi_{n-2}. \end{cases} \tag{4}$$

a) Zeigen Sie per vollständige Induktion: für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit Länge 2π definiert (4) einen C^1-Diffeomorphismus

$$(0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2) \times \ldots \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^n \setminus N,$$

für eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Was ist die geometrische Bedeutung der Koordinate ϕ_{n-2}?

Lösung:
Der Fall $n = 3$ ist uns schon aus Aufgabe 11.1 bekannt. Für ein gegebenes $n \geq 4$ bezeichnen wir mit

$$\psi_n : (0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2} \to \mathbb{R}^n \setminus N_n,$$

die in der Fragestellung beschriebene Abbildung, wobei N_n so definiert wird, dass $\mathbb{R}^n \setminus N_n$ das Bild von ψ_n ist. Um die Notation abzukürzen, werden wir die ϕ_j-Koordinaten zusammen als Vektor

$$\mathbf{\Phi}_{n-2} := (\phi_1, \ldots, \phi_{n-2}) \in (-\pi/2, \pi/2)^{n-2}$$

schreiben. Da die Abhängigkeit von r in ψ_n ziemlich einfach ist, definieren auch die Funktion

$$\Psi_n : I \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2} \to \mathbb{R}^n, \qquad \Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) := \psi_n(1, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}),$$

denn diese Funktion bestimmt ψ_n durch

$$\psi_n(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) = r \Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}). \tag{5}$$

Wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass die Abbildung $\psi_{n-1} : (0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-3} \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus N_{n-1}$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit

$$\operatorname{Det} D\psi_{n-1}(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) > 0$$

für alle $(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) \in (0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-3}$, und dazu, dass $N_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine Nullmenge ist. Wir möchten dann die entsprechenden Aussagen für ψ_n beweisen. Die

Abbildung ψ_{n-1} ist gegeben durch

$$(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad \begin{cases} x_1 & = r\cos\theta\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}, \\ x_2 & = r\sin\theta\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}, \\ x_3 & = r\sin\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}, \\ x_4 & = r\sin\phi_2\cos\phi_3\ldots\cos\phi_{n-3}, \\ & \vdots \\ x_{n-3} & = r\sin\phi_{n-5}\cos\phi_{n-4}\cos\phi_{n-3}, \\ x_{n-2} & = r\sin\phi_{n-4}\cos\phi_{n-3}, \\ x_{n-1} & = r\sin\phi_{n-3}, \end{cases}$$

und ist also eindeutig durch die Relation

$$\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}, 0) = \big(\Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}), 0\big) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

bestimmt, so dass Ψ_n und ψ_n in der Form

$$\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}, \phi_{n-2}) = \big(\cos\phi_{n-2} \cdot \Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}), \sin\phi_{n-2}\big) \tag{6}$$

$$\psi_n(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}, \phi_{n-2}) = \big(r\cos\phi_{n-2} \cdot \Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}), r\sin\phi_{n-2}\big) \tag{7}$$

geschrieben werden können. Die letzte Relation führt zu einer geometrischen Interpretation der verschiedenen Koordinaten $(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}, \phi_{n-2})$, die einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ beschreiben: r ist wie immer der Abstand zwischen $\mathbf{x}$ und 0, $\phi_{n-2} \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist der Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{x}$ und der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, und $(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3})$ beschreiben (durch die Abbildung Ψ_{n-1}) einen Punkt in der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, den man erreicht, indem man $\mathbf{x}$ nach $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ projeziert und den resultierenden Vektor dann normalisiert. Es folgt, dass ψ_n injektiv ist, und das Bild von ψ_n enthählt das Komplement von $N_{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, was eine Nullmenge ist, da N_{n-1} eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $\operatorname{Det} D\psi_n(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})$ in jedem Punkt $(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) \in (0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2}$ positiv ist; dann wird es vom Umkehrsatz folgen, dass ψ_n ein Diffeomorphismus ist. Wegen (5) können wir den Vektor $\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) \in \mathbb{R}^n$ als Spalte und $D\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})$ als n-mal-$(n-1)$-Matrix betrachten, um

$$\operatorname{Det} D\psi_n(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) = \operatorname{Det}\big(\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) \quad rD\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})\big) =: r^{n-1}\operatorname{Det}\Delta_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})$$

zu schreiben, wobei wir die n-mal-n-Matrix

$$\Delta_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) := \big(\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2}) \quad D\Psi_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})\big)$$

definieren. Für alle $r > 0$ folgt, dass die Determinanten von $D\Psi_n(r, \theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})$ und $\Delta_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-2})$ dasselbe Vorzeichen haben. Die Relation (6) impliziert

$$\Delta_n(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}, \phi_{n-2}) = \\ \begin{pmatrix} \cos\phi_{n-2} \cdot \Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) & \cos\phi_{n-2} \cdot D\Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) & -\sin\phi_{n-2} \cdot \Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) \\ \sin\phi_{n-2} & 0 & \cos\phi_{n-2} \end{pmatrix},$$

wobei die erste Reihe eigentlich $n-1$ Reihen und die mittlere Spalte eigentlich $n-2$ Spalten sind. Die Determinante dieser Matrix ist

$$\begin{aligned} &\cos\phi_{n-2} \cdot \operatorname{Det}\big(\cos\phi_{n-2}\Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) \quad \cos\phi_{n-2}D\Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3})\big) \\ &\qquad - (-1)^n\sin\phi_{n-2} \cdot \operatorname{Det}\big(\cos\phi_{n-2} \cdot D\Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) \quad -\sin\phi_{n-2} \cdot \Psi_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3})\big) \\ &= \cos^n\phi_{n-2} \cdot \operatorname{Det}\Delta_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) + \cos^{n-2}\phi_{n-2}\sin^2\phi_{n-2} \cdot \operatorname{Det}\Delta_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}) \\ &= \cos^{n-2}\phi_{n-2} \cdot \operatorname{Det}\Delta_{n-1}(\theta, \mathbf{\Phi}_{n-3}), \end{aligned} \tag{8}$$

und für $\phi_{n-2} \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist dies wegen der Induktionsvoraussetzung immer positiv.

b) Für eine gegebene messbare Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, sei $F : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definiert durch $F(\mathbf{x}) := f\big(\|\mathbf{x}\|\big)$. Zeigen Sie: es gibt eine Konstante $C > 0$, die nicht von der Funktion f abhängt, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = C \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr$.

Lösung:
Wir haben bei Teilaufgabe (a) gesehen, dass die Determinante der Jacobimatrix der Transformation ψ_n gegeben ist durch

$$\operatorname{Det} D\psi(r, \theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}) = r^{n-1} \operatorname{Det} \Delta_n(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}),$$

für eine matrixwertige Funktion Δ_n, die aus endlichen Summen und Produkten von Sinus- und Kosinus-Funktionen der Variablen $\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}$ gebaut wird. Wer hier eine genau Formel sehen will, kann das per Induktion von (8) und dem Resultat von Aufgabe 11.1 herleiten, nämlich

$$\operatorname{Det} \Delta_n(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}) = \cos\phi_1 \cdot \cos^2\phi_2 \cdot \ldots \cdot \cos^{n-2}\phi_{n-2}.$$

Die genaue Formel ist aber für unseren jetzigen Zweck nicht so wichtig, denn die Beschränktheit dieser Funktion von $(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2})$ wird ausreichen. Da das Bild von ψ_n das Komplement einer Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist, folgt jetzt durch die Transformationsformel und den Satz von Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{x})\, d^n x &= \int_{(0,\infty)\times I\times(-\pi/2,\pi/2)^{n-2}} f(r) r^{n-1} \operatorname{Det} \Delta_n(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2})\, dr\, d\theta\, d\phi_1 \ldots d\phi_{n-2} \\ &= C \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr,\end{aligned}$$

wobei die Konstante $C > 0$ durch

$$C := \int_{I\times(-\pi/2,\pi/2)^{n-2}} \operatorname{Det} \Delta_n(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2})\, d\theta\, d\phi_1 \ldots d\phi_{n-2}$$

definiert werden kann; sie ist endlich, weil $\operatorname{Det} \Delta_n(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2})$ eine beschränkte Funktion ist und $I \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2}$ endliches Maß in $\mathbb{R}^{n-1}$ hat.

Aufgabe 11.B
Die Relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dm = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\, dm$$

für $j = 1, \ldots, n$ ist eine n-dimensionale Version von partieller Integration, die unter bestimmten Voraussetzungen durch den Satz von Fubini bewiesen werden kann. Was für Voraussetzungen für f und g reichen, damit diese Relation stimmt? Zeigen Sie insb., dass die Formel immer gilt, falls f stetig differenzierbar und g glatt mit kompaktem Träger ist.

Lösung:
Wir setzen die folgenden Bedingungen voraus:

- f und g sind reellwertige stetig differenzierbare Funktionen;
- $f\, \partial_j g$ und $(\partial_j f) g$ sind Lebesgue-integrierbar;

- $\lim_{R\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus B_R^n} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| = 0$, wobei $B_R^n \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel von Radius $R > 0$ bezeichnet.

Unter dieser Annahmen ist $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f\,\partial_j g$ auch Lebesgue-integrierbar, und die gewünschte Formel ist eine Konsequenz der folgenden Behauptung:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j(fg)\, dm = 0.$$

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir im Folgenden $j := n$ an. Wir schreiben $\widetilde{\mathbf{x}} := (x_1, \dots, x_{n-1})$ und $d^{n-1}\widetilde{x} := dx_1 \dots dx_{n-1}$, und wenden den Satz von Fubini an:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_n(fg)\, dm = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_n(fg)(\widetilde{\mathbf{x}}, x_n)\, dx_n \right) d^{n-1}\widetilde{x}. \tag{9}$$

Der Satz von Fubini garantiert für fast alle $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, dass die Funktion $x_n \mapsto \partial_n(fg)(\widetilde{\mathbf{x}}, x_n)$ auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, und in diesem Fall impliziert Aufgabe 7.3(c),

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_n(fg)(\widetilde{\mathbf{x}}, x_n)\, dx_n = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \partial_n(fg)(\widetilde{\mathbf{x}}, x_n)\, dx_n.$$

Weil f und g stetig differenzierbar sind, dürfen wir hier den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden, und es folgt,

$$\int_{-N}^{N} \partial_n(fg)(\widetilde{\mathbf{x}}, x_n)\, dx_n = f(\widetilde{\mathbf{x}}, N)g(\widetilde{\mathbf{x}}, N) - f(\widetilde{\mathbf{x}}, -N)g(\widetilde{\mathbf{x}}, -N).$$

Dies verschwindet im Limes $N \to \infty$ wegen der Annahme $\lim_{R\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus B_R^n} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| = 0$. Folglich ist die Funktion auf $\mathbb{R}^{n-1}$, die auf der rechten Seite von (9) zu integrieren ist, fast überall 0, und das beweist die Behauptung.