HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 15: Musterlösung zu den Aufgaben 15.1 und 15.2

Aufgabe 15.1 (2 + 3 + 2 + 2 + 4 + 5 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die kartesischen Koordinaten glatte Funktionen $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definieren. Sei $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ die glatte 3-Form gegeben durch

$$\omega := dx \wedge dy \wedge dz.$$

Da $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ist $\omega_{\mathbf{x}}$ eine antisymmetrische multilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, d.h. $\omega_{\mathbf{x}}$ gehört zum Vektorraum $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$. Zeigen Sie:

a) $\omega = dy \wedge dz \wedge dx = dz \wedge dx \wedge dy$.

Lösung:
Das Dachprodukt von 1-Formen ist assoziativ und antikommutativ, also gilt

$$\begin{aligned}\omega &= (dx \wedge dy) \wedge dz = -(dy \wedge dx) \wedge dz = -dy \wedge (dx \wedge dz) = dy \wedge (dz \wedge dx)\\ &= (dy \wedge dz) \wedge dx = -(dz \wedge dy) \wedge dx = -dz \wedge (dy \wedge dx) = dz \wedge (dx \wedge dy).\end{aligned}$$

b) Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{pmatrix}$, wobei die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ als Spalten einer 3-mal-3 Matrix betrachtet werden.
Hinweis: $\dim \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^* = 1$.

Lösung:
Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sind die Abbildungen $\omega_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und

$$\Delta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{pmatrix}$$

beide multilinear und antisymmetrisch, sind also Elemente des 1-dimensionalen Vektorraums $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$. Für die Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \in \mathbb{R}^3$ gilt $\Delta(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = \operatorname{Det}(\mathbb{1}) = 1 \neq 0$, also Δ ist nicht 0 und ist daher eine Basis von $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$. Folglich gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\omega_{\mathbf{x}} = c\Delta$. In der Vorlesung haben wir beweisen, dass $\omega_{\mathbf{x}}$ auch eine Basis von $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$ ist, und zwar $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = 1$, woraus folgt, $c = 1$. Hier nochmal zur Wiederholung die Berechnung: laut Aufgabe 4.1(5) im Skript ist $(dx \wedge dy \wedge dz)_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ die Summe über alle Permutationen $\sigma \in S_3$ der Vektoren $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ von einem Vorzeichen $(-1)^{|\sigma|}$ multipliziert mit dem Tensorprodukt $dx \otimes dy \otimes dz$ ausgewertet auf den permutierten Vektoren. Da $dx(\mathbf{e}_x) = dy(\mathbf{e}_y) = dz(\mathbf{e}_z) = 1$ und alle anderen Auswertungen verschwinden, entsteht nur bei der trivialen Permutation ein nichttrivialer Beitrag, also

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = (dx \otimes dy \otimes dz)(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = dx(\mathbf{e}_x) dy(\mathbf{e}_y) dz(\mathbf{e}_z) = 1.$$

c) Für eine gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{Au}, \mathbf{Av}, \mathbf{Aw}) = \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) = 1$. Insbesondere gilt das für alle 3-dimensionalen Rotationen $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(3)$.

Lösung:
Nach Teilaufgabe (b) folgt

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{Au}, \mathbf{Av}, \mathbf{Aw}) &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{Au} & \mathbf{Av} & \mathbf{Aw}\end{pmatrix} = \operatorname{Det}\left(\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Det}(\mathbf{A}) \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Det}(\mathbf{A}) \cdot \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$; dies bestimmt einen Isomorphismus[1]

$$\flat : \mathbb{R}^3 \to \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*, \qquad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^\flat := \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle, \text{ d.h. } \mathbf{v}^\flat(\mathbf{w}) := \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Sei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, und $\mu := \mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$. Zeigen Sie:

d) Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ definiert durch $\mathbf{v} \mapsto \iota_{\mathbf{v}}\mu := \mu(\mathbf{v}, \cdot, \cdot) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ist auch ein linearer Isomorphismus.

Lösung:
Wir bemerken zuerst, dass $\mathbf{e}_1^\flat, \mathbf{e}_2^\flat, \mathbf{e}_3^\flat \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$ die Dualbasis von $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ ist, denn

$$\mathbf{e}_i^\flat(\mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als weitere Anwendung von Aufgabe 4.1(5) im Skript ist $\iota_{\mathbf{e}_1}\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat)(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ jetzt eine Summe über alle Permutationen $\sigma \in S_3$ vom Vorzeichen $(-1)^{|\sigma|}$ multipliziert mit $\mathbf{e}_1^\flat \otimes \mathbf{e}_2^\flat \otimes \mathbf{e}_3^\flat$ ausgewertet auf der entsprechenden Permutation der Vektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Bei allen Permutationen, die den ersten Vektor versetzen, erscheint in dieser Auswertung entweder $\mathbf{e}_2^\flat(\mathbf{e}_1)$ oder $\mathbf{e}_3^\flat(\mathbf{e}_1)$; da beide 0 sind, verschwindet der Beitrag von solchen Permutationen. Die übrigen Permutationen sind nur die Triviale und die Vertauschung von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$, also

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{e}_1}\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat)(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{|\sigma|} (\mathbf{e}_1^\flat \otimes \mathbf{e}_2^\flat \otimes \mathbf{e}_3^\flat)(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{|\sigma|} (\mathbf{e}_2^\flat \otimes \mathbf{e}_3^\flat)(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}) = (\mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

das heißt,

$$\iota_{\mathbf{e}_1}\mu = \mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat.$$

Nach Teilaufgabe (a) können wir auch $\mu = \mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat = \mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat$ schreiben, so dass die gleiche Berechnung auch zu

$$\iota_{\mathbf{e}_2}\mu = \iota_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat) = \mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat \quad \text{und} \quad \iota_{\mathbf{e}_3}\mu = \iota_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat) = \mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat$$

führt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die drei Elemente $\mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat$, $\mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat$ und $\mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat$ eine Basis von $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ bilden, also haben wir bewiesen: das Bild der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ unter der Abbildung $\mathbf{v} \mapsto \iota_{\mathbf{v}}\mu$ ist ebenfalls eine Basis von $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$, und daher ist diese Abbildung ein Isomorphismus.

e) Das Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ von Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ wird eindeutig durch die Relation $\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat = \iota_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}\mu$ bestimmt.
Hinweis: Einfach in Koordinaten berechnen.

[1] Die Abbildung $\flat : V \to V^*$ und seine Umkehrabbildung $\sharp : V^* \to V$ können analog für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einem Skalarprodukt definiert werden, und heißen die *musikalischen Isomorphismen*. Wie $v^\flat$ und $\lambda^\sharp$ auf Deutsch auszusprechen sind, habe ich leider keine Ahnung; im Englischen sagt man “v-flat” und “λ-sharp”.

Lösung:
Wir schreiben $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$. Dann gilt, $\mathbf{v}^\flat = v_1\, \mathbf{e}_1^\flat + v_2\, \mathbf{e}_2^\flat + v_3\, \mathbf{e}_3^\flat$, denn

$$\begin{aligned}(v_1\, \mathbf{e}_1^\flat + v_2\, \mathbf{e}_2^\flat + v_3\, \mathbf{e}_3^\flat)(\mathbf{w}) &= (v_1\, \mathbf{e}_1^\flat + v_2\, \mathbf{e}_2^\flat + v_3\, \mathbf{e}_3^\flat)(w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3)\\ &= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}^\flat(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Analog gilt $\mathbf{w}^\flat = w_1\mathbf{e}_1^\flat + w_2\mathbf{e}_2^\flat + w_3\mathbf{e}_3^\flat$, und daher,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat &= (v_1\, \mathbf{e}_1^\flat + v_2\, \mathbf{e}_2^\flat + v_3\, \mathbf{e}_3^\flat) \wedge (w_1\, \mathbf{e}_1^\flat + w_2\, \mathbf{e}_2^\flat + w_3\, \mathbf{e}_3^\flat)\\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)\mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat + (v_3w_1 - v_1w_3)\mathbf{e}_3^\flat \wedge \mathbf{e}_1^\flat + (v_1w_2 - v_2w_1)\mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat\\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)\iota_{\mathbf{e}_1}\mu + (v_3w_1 - v_1w_3)\iota_{\mathbf{e}_2}\mu + (v_1w_2 - v_2w_1)\iota_{\mathbf{e}_3}\mu = \iota_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mu.\end{aligned}$$

Da die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto \iota_{\mathbf{v}}\mu$ ein Isomorphismus $\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ist, gibt es für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ nur einen Vektor $\mathbf{u} := \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, der die Relation $\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat = \iota_{\mathbf{u}}\mu$ erfüllt.

f) Für alle Rotationen $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(3)$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\mathbf{A}\mathbf{v} \times \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Lösung:
Nach Teilaufgabe (e) reicht es, die Relation

$$(\mathbf{A}\mathbf{v})^\flat \wedge (\mathbf{A}\mathbf{w})^\flat = \iota_{\mathbf{A}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}\mu \tag{1}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(3)$ zu beweisen. Für $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ gilt per Definition

$$(\mathbf{A}\mathbf{v})^\flat(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\rangle = \mathbf{v}^\flat(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}),$$

weil $\mathbf{A}$ orthogonal ist. Aus der Relation (15) im Skript folgt dann

$$\begin{aligned}\left((\mathbf{A}\mathbf{v})^\flat \wedge (\mathbf{A}\mathbf{w})^\flat\right)(\mathbf{u}, \mathbf{u}') &= (\mathbf{A}\mathbf{v})^\flat(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{w})^\flat(\mathbf{u}') - (\mathbf{A}\mathbf{v})^\flat(\mathbf{u}') \cdot (\mathbf{A}\mathbf{w})^\flat(\mathbf{u})\\ &= \mathbf{v}^\flat(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^\flat(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}') - \mathbf{v}^\flat(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}') \cdot \mathbf{w}^\flat(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})\\ &= (\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}').\end{aligned}$$

Jetzt vergleichen wir das mit der rechten Seite von (1): weil $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 1$ folgt aus Teilaufgabe (c),

$$\begin{aligned}\iota_{\mathbf{A}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}\mu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') &= \mu(\mathbf{A}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \mathbf{u}, \mathbf{u}') = \mu(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}')\\ &= \iota_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mu(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}') = (\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}'),\end{aligned}$$

und damit ist (1) bewiesen.

Bemerkung: In Verbindung mit Aufgabe 13.B folgt aus dieser Aufgabe die allgemeine Relation $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \sin\theta$, *wobei* $\theta \in [0, \pi]$ *der Winkel zwischen* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *ist.*

Aufgabe 15.2 (3 + 2 + 3 Punkte)
Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^3$ als glatte 3-Mannigfaltigkeit mit den kartesischen Koordinaten $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sei $N := \{x \geq 0 \text{ und } y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Auf der offenen Teilmenge $\mathbb{R}^3 \setminus N$ sind auch die Kugelkoordinaten (s. Aufgabe 11.1)

$$r : \mathbb{R}^3 \setminus N \to (0, \infty), \quad \theta : \mathbb{R}^3 \setminus N \to (0, 2\pi), \quad \phi : \mathbb{R}^3 \setminus N \to (-\pi/2, \pi/2)$$

als glatte Funktionen definiert, und diese sind eindeutig durch die Relationen

$$x = r\cos\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\cos\phi, \qquad z = r\sin\phi$$

bestimmt.

a) Finden Sie die eindeutigen glatten Funktionen $f_{ij} : \mathbb{R}^3 \setminus N \to \mathbb{R}$ für $i, j = 1, 2, 3$, so dass

$$\begin{aligned} dx &= f_{11}\, dr + f_{12}\, d\theta + f_{13}\, d\phi, \\ dy &= f_{21}\, dr + f_{22}\, d\theta + f_{23}\, d\phi, \\ dz &= f_{31}\, dr + f_{32}\, d\theta + f_{33}\, d\phi \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus N$ gilt. Versuchen Sie, möglichst einfache Formeln für diese Funktionen zu finden.
Hinweis: Sie dürfen die Produktregel $d(fg) = g\, df + f\, dg$ nicht vergessen.

Lösung:
Aus $x = r \cos\theta \cos\phi$ folgt

$$\begin{aligned} dx &= d(r\cos\theta\cos\phi) = (\cos\theta\cos\phi)\, dr + r\cos\phi\, d(\cos\theta) + r\cos\theta\, d(\cos\phi) \\ &= \cos\theta\cos\phi\, dr + r\cos\phi \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\right) d\theta + r\cos\theta \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\right) d\phi \\ &= \cos\theta\cos\phi\, dr - r\sin\theta\cos\phi\, d\theta - r\cos\theta\sin\phi\, d\phi = \frac{x}{r}\, dr - y\, d\theta - x\tan\phi\, d\phi. \end{aligned}$$

Analog folgt aus $y = r\sin\theta\cos\phi$ und $z = r\sin\phi$,

$$dy = \sin\theta\cos\phi\, dr + r\cos\theta\cos\phi\, d\theta - r\sin\theta\sin\phi\, d\phi = \frac{y}{r}\, dr + x\, d\theta - y\tan\phi\, d\phi$$

und

$$dz = \sin\phi\, dr + r\cos\phi\, d\phi = \frac{z}{r}\, dr + r\cos\phi\, d\phi.$$

Das Resultat lässt sich durch die folgende Matrixrelation zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y & -x\tan\phi \\ y/r & x & -y\tan\phi \\ z/r & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) Finden Sie (wieder mit möglichst einfachen Formeln) die eindeutigen glatten Funktionen $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \setminus N \to \mathbb{R}$, so dass $d\theta = g_1\, dx + g_2\, dy + g_3\, dz$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus N$ gilt.

Lösung:
Man könnte die Matrix in (2) invertieren, aber das wäre mühsam. Eine bessere Idee, wenn es wirklich nur um $d\theta$ geht, ist dass man aus (2) die resultierenden Formeln für $y\, dx$ und $x\, dy$ vergleicht:

$$\begin{aligned} y\, dx &= \frac{xy}{r}\, dr - y^2\, d\theta - xy\tan\phi\, d\phi, \\ x\, dy &= \frac{xy}{r}\, dr + x^2\, d\theta - xy\tan\phi\, d\phi. \end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$x\, dy - y\, dx = (x^2 + y^2)\, d\theta, \qquad \text{also} \qquad d\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy.$$

Dass dz in dieser Relation nicht erscheint, bedeutet, dass die Funktion g_3 verschwindet.

c) Beweisen Sie die Relation $dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \cos\phi\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus N$.

Lösung:
Wir berechnen aufgrund des Resultats von Teilaufgabe (a):

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy \wedge dz &= \left(\frac{x}{r}\, dr - y\, d\theta - x \tan\phi\, d\phi\right) \wedge \left(\frac{y}{r}\, dr + x\, d\theta - y \tan\phi\, d\phi\right) \wedge \left(\frac{z}{r}\, dr + r\cos\phi\, d\phi\right) \\
&= \frac{x}{r} xr \cos\phi\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi - y\frac{y}{r} r\cos\phi\, d\theta \wedge dr \wedge d\phi \\
&\quad + y(y\tan\phi)\frac{z}{r} d\theta \wedge d\phi \wedge dr - (x\tan\phi)x\frac{z}{r}\, d\phi \wedge d\theta \wedge dr \\
&= \left(x^2\cos\phi + y^2\cos\phi + \frac{y^2 z}{r}\tan\phi + \frac{x^2 z}{r}\tan\phi\right) dr \wedge d\theta \wedge d\phi \\
&= (x^2+y^2)\frac{\cos^2\phi + \frac{z}{r}\sin\phi}{\cos\phi}\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi \\
&= (x^2+y^2)\frac{\cos^2\phi + \sin^2\phi}{\cos\phi}\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi \\
&= \frac{r^2\cos^2\phi}{\cos\phi}\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi = r^2\cos\phi\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi.
\end{aligned}$$