Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 2: Musterlösung zu Aufgabe 2.2

Aufgabe 2.2 (4 + 4 Punkte)
Für jedes der folgenden linearen Differentialgleichungssysteme auf $\mathbb{R}^2$, schreiben Sie mittels Eigenvektoren und Eigenwerte die allgemeine Lösung (mit zwei freien Parametern) explizit hin, und zeichnen Sie ein Phasenportrait in der (x, y)-Ebene.

a) $\dot{x} = -x - y$ und $\dot{y} = -2y$.

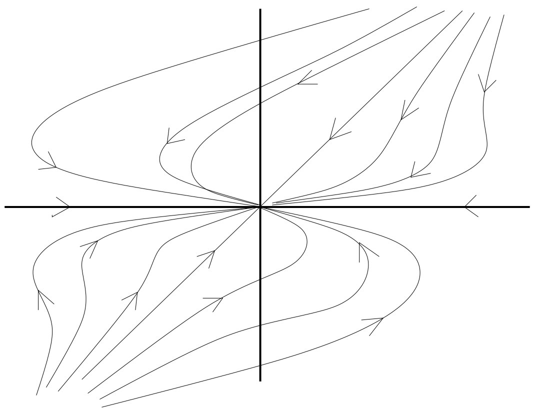
b) $\dot{x} = x - 2y$ und $\dot{y} = -y$.

Lösung:

a) Es gilt: $\dot{x} = -x - y \;\text{ und }\; \dot{y} = -2y \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$ $(*)$
Da $\det(A - t \cdot \mathbb{1}) = (1 + t)(2 + t)$, sind die Eigenwerte von A gleich $t = -1$ und $t = -2$. Zugehörige Eigenvektoren sind zum Beispiel $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{1}{1}$. Da $(*)$ eine homogene lineare Differentialgleichung ist, sind die Lösung von $(*)$ genau

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für beliebige Konstanten } a, b \in \mathbb{R}.$$

Da $\binom{x(t)}{y(t)} = e^{-t}\left(a\binom{1}{0} + be^{-t}\binom{1}{1}\right)$ gilt für $t \to \infty$, dass $\left|\binom{x(t)}{y(t)}\right| \to 0$ für jede Lösung von $(*)$ und für $a \neq 0$ nähern sich diese asymptotisch dem von $a\binom{1}{0}$ aufgespannten Strahl, für $a = 0$ aber liegt die Lösung immer auf dem von $b\binom{1}{1}$ aufgespannten Strahl. Analog folgt aus $\binom{x(t)}{y(t)} = e^{-2t}\left(ae^{t}\binom{1}{0} + b\binom{1}{1}\right)$, dass für $t \to -\infty$ gilt $\left|\binom{x(t)}{y(t)}\right| \to \infty$ für jede Lösung und für $b \neq 0$ nähern sich diese asymptotisch dem von $b\binom{1}{1}$ aufgespannten Strahl, während für $b = 0$ die Lösung immer auf dem von $a\binom{1}{0}$ aufgespannten Strahl liegt.



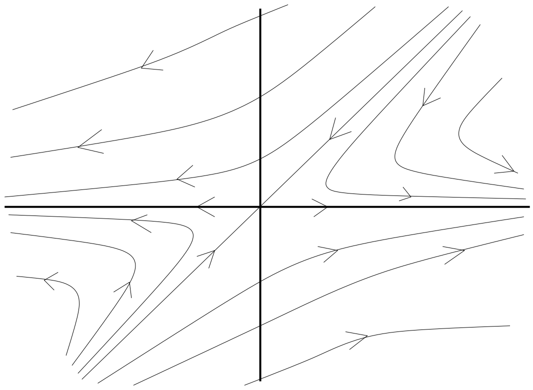
Phasenportrait für a)

b) Es gilt: $\dot{x} = x - 2y \;\text{ und }\; \dot{y} = -y \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$ $(**)$
Da $\det(B - t \cdot \mathbb{1}) = -(1 - t)(1 + t)$, sind die Eigenwerte von B gleich $t = 1$ und $t = -1$.

Zugehörige Eigenvektoren sind zum Beispiel $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{1}{1}$. Da $(**)$ eine homogene lineare Differentialgleichung ist, sind die Lösung von $(*)$ genau

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für beliebige Konstanten } a, b \in \mathbb{R}.$$

Da $\binom{x(t)}{y(t)} = e^t \left(a\binom{1}{0} + be^{-2t}\binom{1}{1}\right)$ gilt für $t \to \infty$, dass $\left|\binom{x(t)}{y(t)}\right| \to \infty$ für jede Lösung von $(**)$ mit $a \neq 0$ und diese nähern sich asymptotisch dem von $a\binom{1}{0}$ aufgespannten Strahl. Für $a = 0$ gilt $\binom{x(t)}{y(t)} = be^{-t}\binom{1}{1} \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Analog folgt aus $\binom{x(t)}{y(t)} = e^{-t}\left(ae^{2t}\binom{1}{0} + b\binom{1}{1}\right)$, dass für $b \neq 0$ und $t \to -\infty$ gilt $\left|\binom{x(t)}{y(t)}\right| \to \infty$ und $\binom{x(t)}{y(t)}$ nähert sich asymptotisch dem von $b\binom{1}{1}$ aufgespannten Strahl. Für $b = 0$ gilt $\binom{x(t)}{y(t)} = ae^t\binom{1}{0} \xrightarrow{t\to\infty} 0$.



Phasenportrait für b)