Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 5: Musterlösung zur Aufgabe 5.2

Aufgabe 5.2 (4 + 4 Punkte)
Gegeben sei eine Folge stetiger Funktionen $\mathbf{V}_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gleichmäßig gegen $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ konvergieren. Eine Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt **periodisch** mit Periode $T > 0$, falls

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Angenommen, es existieren Konstanten $C > 0$ und $R > 0$, und eine Folge $\mathbf{x}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ periodischer Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(t))$ mit Perioden $T_n > 0$, so dass

$$\frac{1}{C} \le T_n \le C \quad \text{und} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{x}_n(t)\| \le R \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie:

a) Die Folge $\mathbf{x}_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ hat eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion $\mathbf{x} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ auch periodisch ist, mit Periode im Intervall $[1/C, C]$.

Hinweis 1: Die Folge T_n hat eine konvergente Teilfolge.
Hinweis 2: Für die Funktionen $\mathbf{y}_n(t) := \mathbf{x}_n(T_n t)$ gilt $\mathbf{y}_n(t+1) = \mathbf{y}_n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Was für eine Differentialgleichung erfüllen sie? Sind ihre Ableitungen beschränkt?
Hinweis 3: Wenn die Funktionen $\mathbf{y}_n$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergieren und auch $\mathbf{y}_n(t+1) = \mathbf{y}_n(t)$ erfüllen, dann konvergieren sie auch auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig.

Lösung:
Dem zweiten Hinweis folgend, betrachten wir die Funktionenfolge

$$\mathbf{y}_n(t) := \mathbf{x}_n(T_n t),$$

die $\mathbf{y}_n(t+1) = \mathbf{y}_n(t)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Außerdem erfüllt $\mathbf{y}_n$ die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{y}}_n(t) = T_n \cdot \dot{\mathbf{x}}_n(T_n t) = T_n \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(T_n t)) = T_n \mathbf{V}_n(\mathbf{y}_n(t)), \tag{1}$$

sowie die Schranke

$$\|\mathbf{y}_n(t)\| = \|\mathbf{x}_n(T_n t)\| \le R \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

also ist die Folge $\mathbf{y}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gleichmäßig beschränkt. Die abgeschlossene Kugel um $0 \in \mathbb{R}^2$ von Radius R ist kompakt, also konvergiert $\mathbf{V}_n$ auf dieser Kugel gleichmäßig gegen $\mathbf{V}$; da $\mathbf{V}$ stetig und daher auf der R-Kugel beschränkt ist, und die Perioden T_n auch beschränkt sind, folgt, dass die rechte Seite von (1) für alle n und t gleichmäßig beschränkt ist, also gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|\dot{\mathbf{y}}_n(t)\| \le M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dies impliziert, dass die Funktionenfolge $\mathbf{y}_n$ auch gleichgradig stetig ist.
Der Satz von Arzelà-Ascoli kann leider nicht sofort angewendet werden, denn der Satz gilt für eine Funktionenfolge auf einem *kompakten* metrischen Raum, und $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Aber der Satz impliziert, dass die Folge der eingeschränkten Funktionen $\mathbf{y}_n|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y} \in C\big([0,1],\mathbb{R}^2\big)$$

hat. Da $\mathbf{y}_{n_k}(t+1) = \mathbf{y}_{n_k}(t)$ für alle k und t gilt, konvergiert die gleiche Teilfolge $\mathbf{y}_{n_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ auch auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die $\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Nun ersetzen wir diese Teilfolge mit einer weiteren Teilfolge, so dass o.B.d.A. auch die Perioden T_{n_k} gegen eine positive Zahl $T \in [1/C, C]$ konvergieren; dies ist möglich, weil T_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ im kompakten Intervall $[1/C, C]$ liegt. Wir behaupten, dass die Lösungen $\mathbf{x}_{n_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gleichmäßig gegen die T-periodische Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{y}(t/T)$$

konvergieren. Um das zu zeigen, weisen wir zuerst darauf hin, dass $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig stetig ist, aber wegen der Periodizität impliziert das, dass $\mathbf{y}$ auch auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Es folgt, dass beide Terme auf der rechten Seite der Relation

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_{n_k}(t)\| = \|\mathbf{y}(t/T)-\mathbf{y}_{n_k}(t/T_{n_k})\| \leq \|\mathbf{y}(t/T)-\mathbf{y}(t/T_{n_k})\|+\|\mathbf{y}(t/T_{n_k})-\mathbf{y}_{n_k}(t/T_{n_k})\|$$

beliebig klein werden, wenn k (unabhängig von t) groß wird, und somit folgt die gleichmäßige Konvergenz.

b) Die Grenzfunktion $\mathbf{x} \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$.

Lösung:
Um die Notation zu vereinfachen, ersetzen wir jetzt die unsprüngliche Folge mit der konvergenten Teilfolge, also dürfen wir jetzt o.B.d.A. die Konvergenz

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}$$

annehmen. Die Bilder dieser Funktionen sind alle in der abgeschlossenen Kugel von Radius R um $0 \in \mathbb{R}^2$ enthalten, und auf dieser Kugel konvergiert $\mathbf{V}_n$ auch gleichmäßig gegen $\mathbf{V}$. Wir behaupten: die verknüpften Funktionen $\mathbf{V}_n \circ \mathbf{x}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ konvergieren auch gleichmäßig gegen $\mathbf{V} \circ \mathbf{x}$. Und zwar, für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(t))\| \leq \|\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}_n(t))\| + \|\mathbf{V}(\mathbf{x}_n(t)) - \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(t))\|\,,$$

wobei für großes n der erste Term auf der rechten Seite beliebig klein wird, weil $\mathbf{V}$ auf der abgeschlossenen R-Kugel gleichmäßig stetig ist, und der zweite Term wegen der gleichmäßigen Konvergenz $\mathbf{V}_n \to \mathbf{V}$ auch beliebig klein wird.
Wegen der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(t))$ erfüllt $\mathbf{x}_n$ auch die Integralgleichung

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_n(0) + \int_0^t \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(s))\,ds.$$

Weil $\mathbf{V}_n \circ \mathbf{x}_n$ gleichmäßig gegen $\mathbf{V} \circ \mathbf{x}$ konvergiert, konvergiert alles in dieser Gleichung bei $n \to \infty$, und führt also zur Gleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{x}(s))\,ds.$$

Das impliziert, dass $\mathbf{x}$ auch stetig differenzierbar und die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ erfüllt.