Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik

2. Übungen

zur Vorlesung „Logik II/Modelltheorie"

2.1 Sei Σ ein Axiomensystem für die Körpertheorie in der Signatur $+$, $-$, 0, $\cdot$, 1, wobei die Symbole wie üblich interpetiert werden.
Zeigen Sie, daß Σ keine Menge von $\forall$-Aussagen sein kann.

2.2 Zeigen Sie:

$$\mathrm{Mod}(T_\exists) = \{N : \text{ Es existieren } M \hookrightarrow N', \text{ so daß } N' \equiv N \text{ und } M \models T\}.$$

(Für die schwierigere Richtung ($\rightarrow$) reicht es für $N \in \mathrm{Mod}(T_\exists)$ zu zeigen, daß $T \cup \mathrm{Th}(N)_\forall$ konsistent ist. Dies müßte begründet werden.)

2.3 Seien A, B, C L-Strukturen, f ein Homomorphismus von A in B, g sei ein Homomorphismus von B in C und h sei die Hintereinanderausführung $g \circ f$ von A in C. Dann gilt:

i) Wenn f und g elementar sind, so ist auch h elementar.
ii) Wenn g und h elementar sind, so ist auch f elementar.
iii) Zeigen Sie, daß g nicht elementar sein muß, wenn h und f elementar sind.

2.4 Sei T eine L-Theorie, U ein einstelliges Relationssymbol und L^+ die Erweiterung von L, die durch Hinzufügen von U entsteht. Geben Sie eine L^+-Theorie T^+ an, so daß

- $T \subseteq T^+$,
- wenn $M^+ \models T^+$, so ist U^{M^+} der Grundbereich eines elementaren Untermodells von $M^+ \restriction L$ und
- wenn $M \models T$ und $M_0 \leq M$, so gilt $M^+ \models T^+$, wobei M^+ aus M entsteht indem U^{M^+} gleich M_0 gesetzt wird.

Beweisen Sie alle Behauptungen ausführlich.
(Hinweis: Tarski-Vaught-Test)