Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik

6. Übungen

zur Vorlesung „Logik II/Modelltheorie“

6.1 T erlaubt genau dann die Elimination der Quantoren, wenn T modellvollständig ist und wenn für beliebige T-Modelle M und N mit gemeinsamer Unterstruktur A (kann leer sein, wenn es keine Konstanten gibt) ein T-Modell M' mit

$$\begin{array}{ccccc} & & M' & & \\ & \subseteq & & \hookleftarrow & \\ M & & & & N \\ & \supseteq & & \subseteq & \\ & & A & & \end{array}$$

existiert.

6.2 Wir betrachten die Theorie T der additiven Gruppe der ganzen Zahlen in der Signatur $\{+, -, 0\}$. Ist T modellvollständig?
Begründen Sie Ihre Antwort.
(Hinweis: Betrachten Sie die Untergruppe der geraden Zahlen.)

6.3 Zeigen Sie, daß sich jede modellvollständige Theorie durch $\forall\exists$-Aussagen axiomatisieren läßt. Sie können hierzu folgenden Satz benutzen:

Satz. *Eine Theorie T ist genau dann $\forall\exists$ axiomatisierbar, wenn sie induktiv ist, d.h. wenn die Vereinigung jeder stetigen Kette von T-Modellen wieder ein T-Modell ist.*

6.4 Sei M eine unendliche abelsche Gruppe in der Signatur $\{+, -, 0\}$.
Zeigen Sie: Wenn M in der Theorie der abelschen Gruppen existentiell abgeschlossen ist, dann ist M dividierbar.

Hinweise: mx kürze die m-fache Summe von x ab. Eine abelsche Gruppe M ist dividierbar, wenn für jede natürliche Zahl m gilt: $M \models \forall x \exists y\ my = x$. Sie können folgenden Satz benutzen: *Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine dividierbare abelsche Gruppe einbetten.*