Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik

28. Oktober 2011

2. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

2.1 Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Formeln Tautologien sind.

$$\varphi_2 \quad \equiv \quad [(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge (p_1 \vee p_2)] \longrightarrow [(q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2)]$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 \quad \equiv \quad & [(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge (p_3 \to q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge \neg(q_1 \wedge q_3) \wedge \neg(q_2 \wedge q_3) \\ & \wedge(p_1 \vee p_2 \vee p_3)] \longrightarrow [(q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2) \wedge (q_3 \to p_3)] \end{aligned}$$

2.2 Geben Sie für jedes $n > 3$ eine Tautologie nach obigem Muster (2.1) an. Begründen Sie Ihre Behauptung.

2.3 Sind die beiden folgenden Formeln logisch äquivalent? Beweisen Sie Ihre Antwort.

$$r \to (q \to (p \leftrightarrow (q \to r))) \qquad \text{und} \qquad r \to (q \to p)$$

2.4 i) Für welche Belegungen von $p_1, \dots, p_n$ ist folgende Formel wahr:

$$\Big(\bigvee_{1 \le i \le n} p_i \Big) \longleftrightarrow \bigwedge_{1 \le i \le n} \Big(\bigvee_{j \ne i} p_j \Big)$$

ii) Zeigen Sie die logische Äquivalenz zu

$$\bigwedge_{1 \le i \le n} \Big(p_i \to \bigvee_{j \ne i} p_j \Big)$$

Alle Behauptungen müssen bewiesen werden.