

4. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

4.1 Beweisen Sie folgenden Satz für die Aussagenlogik:

Sei $\varphi \rightarrow \psi$ eine Tautologie und φ und ψ besitzen mindestens eine gemeinsame Aussagenvariable. Dann existiert eine Formel θ mit folgenden Eigenschaften:

- i) die Aussagenvariablen, die in θ vorkommen, kommen sowohl in φ als auch in ψ vor.
- ii) $\varphi \rightarrow \theta$ und $\theta \rightarrow \psi$ sind Tautologien.

4.2 Eine Struktur M der Signatur $\langle \langle \rangle \rangle$, wobei $<$ eine zweistellige Relation ist, heißt Halbordnung, wenn in M gilt:

- i) Für alle a gilt nicht $a < a$.
- ii) Für alle a, b, c folgt aus $a < b$ und $b < c$ auch $a < c$.

M heißt lineare Ordnung, wenn weiterhin gilt:

- iii) Für alle a, b gilt $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.

Zeigen Sie für „ $<$ “-Strukturen M und N :

Wenn M und N lineare Ordnungen sind, so ist jeder Homomorphismus von M in N ein Monomorphismus.

4.3 Sei M eine L -Struktur und A eine Teilmenge von $\text{dom}(M)$. $\text{Aut}(M)$ sei die Menge der Automorphismen von M . $\text{Aut}_A(M)$ sei die Menge der $f \in \text{Aut}(M)$ mit

$f(a) = a$ für alle $a \in A$ und $\text{Aut}_{(A)}(M)$ die Menge $f \in \text{Aut}(M)$ mit $f(A) = A$. Wir definieren für f und g in $\text{Aut}(M)$ die Abbildung $f \circ g$ durch $f \circ g(a) = f(g(a))$. Zeigen Sie:

- a) $f \circ g$ ist wieder ein Automorphismus.
- b) $\text{Aut}(M)$ ist bezüglich \circ eine Gruppe.
- c) $\text{Aut}_{(A)}(M)$ ist eine Untergruppe von $\text{Aut}(M)$ und $\text{Aut}_A(M)$ ist ein Normalteiler von $\text{Aut}_{(A)}(M)$.

4.4 \mathbb{F}_2 sei der Körper mit 2 Elementen. Wir betrachten den Vektorraum $V = (\mathbb{F}_2)^2$ in der Sprache $+$, 0 , f_0 und f_1 , wobei f_i für die skalare Multiplikation mit i steht.

- a) Berechnen Sie die Anzahl der Homomorphismen von V in V .
- b) Berechnen Sie die Größe von $\text{Aut}(V)$.