Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik
17. November 2011

5. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

5.1 Wir betrachten eine Sprache L mit einem zweistelligen Relationssymbol $R(x, y)$ und die folgenden L-Strukturen M_i $(i < 4)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(M_0) &= \{i \in \mathbb{N} : i < 51\}, \quad R^{M_0} = \{(i, j) : i < j\},\\
\mathrm{dom}(M_1) &= \mathrm{dom}(\mathbb{N}), \quad R^{M_1} = \{(i, j) : i < j\},\\
\mathrm{dom}(M_2) &= \mathrm{dom}(\mathbb{Z}), \quad R^{M_2}(x, y) \text{ gdw. } x - y \text{ ist durch 2 teilbar,}\\
\mathrm{dom}(M_3) &= \mathrm{dom}(\mathbb{Z}), \quad R^{M_3}(x, y) \text{ gdw. } x - y \text{ ist durch 3 teilbar.}
\end{aligned}$$

Geben Sie für jedes Paar $0 \leq i < j < 4$ eine Formel φ_{ij} mit $M_i \models \varphi_{ij}$ und $M_j \models \neg\varphi_{ij}$ an.

5.2 Zeigen Sie, daß

$$\forall x \forall y\, \varphi(x, y) \rightarrow \exists x \exists y\, \psi(x, y) \quad \text{und} \quad \exists x \exists y (\varphi(x, y) \rightarrow \psi(x, y))$$

logisch äquivalent sind.

5.3 Führen Sie die folgenden Formeln in logische äquivalente Formeln in pränexer disjunktiver Normalform über:

i) $\neg \forall x \forall u \exists y \forall v\, (R(u, v, y) \longrightarrow R(f(u), f(v), x))$

ii) $(\exists x \forall y\, R(x, y) \wedge \forall z\, P(z)) \longrightarrow \forall y \exists x \exists z\, K(x, y, z)$