

6. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

6.1 R sei ein zweistelliges Relationssymbol. Sei

$$\Sigma = \{\forall x \neg R(x, x), \forall xyz(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)), \forall xy(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))\}.$$

Weiterhin sei

$$\varphi_1 \equiv \forall xy[R(x, y) \rightarrow \exists z[R(x, z) \wedge R(z, y)]]$$

$$\varphi_2 \equiv \forall x\exists y[R(x, y) \wedge \forall z(z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow R(z, x) \vee R(y, z))]$$

- Geben Sie Modelle für $\Sigma \cup \{\varphi_1\}$ und $\Sigma \cup \{\varphi_2\}$ an.
- Besitzt $\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Modell. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Geben Sie ein Modell für Σ an, das keine lineare Ordnung ist.

6.2 Sei T eine Theorie.

- Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
 - T ist vollständig.
 - Für alle Aussagen φ und ψ gilt:
 $\varphi \rightarrow \psi \in T$ genau dann, wenn $\neg\varphi \in T$ oder $\psi \in T$.
- Welche Richtung von b) gilt für jede Theorie. Begründen Sie Ihre Antwort.

6.3 $\sigma(L)$ enthalte ein zweistelliges Relationssymbol $R(x, y)$ und ein Konstantensymbol c . M sei eine L -Struktur mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle a, b aus M gilt:
 $R^M(a, b)$ genau dann, wenn **entweder** $a = c^M$ **oder** $b = c^M$.
 - M ist unendlich.
- Geben Sie eine Menge Σ von L -Aussagen an, die genau die Eigenschaften a) und b) beschreiben.
 - Zeigen Sie

$$\Sigma \models \forall x \neg R(x, x)$$

$$\Sigma \models \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$

Erklären Sie genau Ihr Vorgehen.

- Zeigen Sie, daß in M ohne Parameter nur die folgenden Teilmengen von $\text{dom}(M)$ definierbar sind:
 \emptyset , $\text{dom}(M)$, $\{c^M\}$ und $\text{dom}(M) \setminus \{c^M\}$.
Geben Sie zuerst die Formeln an, die die obigen Mengen definieren.

6.4 Zeigen Sie für alle Theorien T : $\text{Th}(\text{Mod}(T)) = T$.