Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik 8. Dezember 2011

8. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

8.1 Die Signatur von L bestehe aus einem zweistelligen Relationssymbol $R(x, y)$ und Konstantensymbolen $c_0, c_1, c_2, \ldots$
Sei $\mathrm{dom}(M) = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}$, $R^M((a, b)(c, d))$ gdw. $a = c$ und sei $c_i^M = (i, 0)$.

a) Formulieren Sie die folgenden Sachverhalte durch Aussagenmengen:
   i) $R(x, y)$ definiert eine Äquivalenz-Relation.
   ii) Diese hat unendlich viele verschiedene Klassen.
   iii) Jede R-Klasse ist unendlich.
   iv) Für $i \neq j$ liegen c_i und c_j in verschiedenen Klassen.

b) Welche der Aussagenmengen in a) sind in M erfüllt. Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Zeigen Sie die Existenz eines Modells N von $\mathrm{Th}(M)$, das eine R-Klasse besitzt, die keines der Elemente c_i^N enthält. Benutzen Sie den Endlichkeitssatz.

8.2 Eine Theorie T heißt endlich axiomatisierbar, wenn $T = \{\varphi\}^{\models}$.
Wenn $T = \Sigma^{\models}$ und T ist endlich axiomatisierbar, dann existiert eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, so daß $T = \Sigma_0^{\models}$.

8.3 Sie L eine beliebige elementare Sprache. Zeigen Sie, daß keine L-Aussage φ existiert, so daß $M \models \varphi$ gdw. $|M|$ ist endlich.