Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Wir betrachten die reellwertige 4×3 Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1,5 & 3,25 & 6,25 \\ 0,5 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

sowie die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, welche durch $F(x) := Ax$, für alle $x \in \mathbb{R}^3$, gegeben ist.

a) Bestimmen Sie $Ker(F)$, sowie den Rang von A.

b) Ist F surjektiv? Ist F injektiv?

c) Bestimmen Sie für $b = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Menge $\mathcal{L}(A, b)$, also die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

d) Zeichnen Sie $Ker(F)$ und $\mathcal{L}(A, b)$ als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und A eine reellwertige $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie mit Hilfe des Kern-Bild-Satzes, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.

a) Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Gleichung $Ax = b$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Gleichung $Ax = b$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Gleichung $Ax = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Wir betrachteten einen gerichteten Graphen, d.h. eine Menge von n Knoten $\{K_1, ..., K_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ zusammen mit einer Menge $E \subseteq \{(K_1, K_1), (K_1, K_2), ..., (K_i, K_j), ...(K_n, K_{n-1}), (K_n, K_n)\}$ von Kanten zwischen Knoten K_i und K_j.
Ein Weg der Länge $k \in \mathbb{N}$ ist ein $(k+1)$ - Tupel von Knoten, so dass zwei aufeinanderfolgende Knoten K_i, K_j in diesem Tupel stets durch eine Kante (K_i, K_j) aus E verbunden sind.
Wir betrachten die *Adjazenzmatrix* $A = (a_{i,j})_{i,j=1,...,n}$, das heißt $a_{i,j} = 1$, gilt genau dann, wenn $(K_i, K_j) \in E$, d.h. wenn K_i und K_j durch eine Kante verbunden sind, ansonsten ist $a_{i,j}$ gleich 0. Damit ist A eine $n \times n$ - Matrix, welche ausschließlich aus Nullen und Einsen besteht.

a) Begründen Sie: Für die Matrix $A^2 = A \cdot A$ mit $A^2 = \left(a_{i,j}^{(2)}\right)_{i,j=1,...,n}$ gilt, dass $a_{i,j}^{(2)}$ die Anzahl der Wege der Länge 2 zwischen K_i und K_j angibt.

b) Verallgemeinern Sie a) für beliebige Potenzen $k \in \mathbb{N}$: Für die Matrix $A^k =: \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j=1,...,n}$ gilt, dass $a_{i,j}^{(k)}$ die Anzahl der Wege der Länge k zwischen K_i und K_j angibt.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Für Winkel $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ betrachten wir die 3×3 Matrizen

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B_\beta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

sowie die Matrix

$$D_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

a) Kommutieren A_α und B_β? Interpretieren Sie die durch $A_\alpha, B_\beta, D_{\alpha,\beta}$ beschriebenen linearen Abbildungen.

b) Wir modellieren die Erdoberfläche als Sphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$, so dass der Schnitt zwischen dem Nullmeridian und Äquator gerade der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, der Schnitt zwischen dem Meridian mit 90° östlicher Richtung und Äquator gerade der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Nordpol gerade der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Demnach wäre Berlin beschrieben durch den Punkt $\begin{pmatrix} \cos(52,5°)\cos(13,4°) \\ \cos(52,5°)\sin(13,4°) \\ \sin(52,5°) \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie alle Punkte der Sphäre, welche durch $D_{\frac{1}{3}\pi,\frac{5}{4}\pi}$ auf Punkte abgebildet werden, bei denen die ersten beiden Koordinaten denen von Berlin entsprechen.

Abgabe:
Montag, 23.01.2012 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.