Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Blatt 11
Wintersemester 2011/12

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 0 (Pflichtaufgabe).
Schreiben Sie das griechische Alphabet in Groß- und Kleinbuchstaben auf.

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix unter Verwendung des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0,5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (1,5+1,5+0,5+0,5 Punkte).

a) Eine der elementaren Zeilenumformungen ist die Multiplikation einer der Zeilen mit einer Zahl ungleich Null. Angenommen A ist die umzuformende $m \times n$ - Matrix und A' die Matrix, welche durch die Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$ entsteht. Finden Sie in Abhängigkeit von i und λ eine $m \times m$ - Matrix $S_i(\lambda)$, so dass $A' = S_i(\lambda) \cdot A$ gilt.

b) Eine der elementaren Zeilenumformungen ist das Vertauschen von zwei Zeilen. Angenommen A ist die umzuformende $m \times n$ - Matrix und A' die Matrix, welche durch das Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile entsteht. Finden Sie in Abhängigkeit von i und j eine $m \times m$ - Matrix P_i^j, so dass $A' = P_i^j \cdot A$ gilt.

c) Was sind die zu $S_i(\lambda)$ und P_i^j inversen Matrizen?

d) Wie wird eine quadratische Matrix A verändert, wenn man sie von rechts, statt von links mit $S_i(\lambda)$ bzw. P_i^j multipliziert?

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Wir betrachten die Basis $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ des $\mathbb{R}^2$. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diejenige lineare Abbildung, welche $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ abbildet. Wir betrachten weiterhin die Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

a) Beschreiben Sie F geometrisch. Geben Sie $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ an.

b) Geben Sie die Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ der linearen Abbildung F an.

c) Geben Sie die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ an, welche der Koordinatentransformation entspricht, durch welche den Koordinaten eines Vektors $v \in \mathbb{R}^2$ bzgl. $\mathcal{A}$ Koordinaten desselben Vektors bzgl. $\mathcal{B}$ zugeordnet werden.

d) Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ der linearen Abbildung F.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

a) Es sei V_3 der Vektorraum der reellwertigen Polynome in einer Variablen vom Grad ≤ 3 und V_2 entsprechend der Vektorraum der reellwertigen Polynome in einer Variablen vom Grad ≤ 2. Sei $F : V_3 \to V_2$ die lineare Abbildung, welche jedem Polynom seine erste Ableitung zuordnet.
Wir betrachten nun die Basis $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$ von V_2. Finden Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von V_3, so dass die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ von F gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

b) Nun seien V, W zwei beliebige reellwertige endlich-dimensionale Vektorräume und $F : V \to W$ eine beliebig lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass man für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Im}(F)$ und Ergänzung $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$ zu Basis von W stets eine Basis $\mathcal{A}$ von V so wählen kann, dass die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}}$ die Form

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annimmt, wobei E_r die $r \times r$ - Einheitsmatrix ist.
Hinweis: Schauen Sie sich die Aussage und den Beweis des Kern-Bild-Satzes noch einmal an.

Abgabe:
Montag, 30.01.2012 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.