Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Blatt 12
Wintersemester 2011/12

# Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

**Aufgabe 1** (4 Punkte).
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4\times 4}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \Theta = \alpha \cdot A + \gamma \cdot \Gamma, \text{ für beliebige } \alpha, \gamma \in \mathbb{Q}.$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte).
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Berechnet man die Determinante einer Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

nach Definition, so bekommt man im Allgemeinen $n!$ Summanden mit je $n$ Faktoren.

b) Die *Regel von Sarrus* ist eine Berechnungsformel für $3\times 3$-Matrizen, die Sie zum Beispiel bei Wikipedia nachlesen können. Schreiben Sie die analoge Regel für $4\times 4$-Matrizen $M = (\mu_{ij})_{i,j=1\dots 4} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$ auf. Begründen Sie mit Hilfe von Teil a), warum diese analoge Regel im Allgemeinen *nicht* die Determinante $\det(M)$ liefern kann.

**Aufgabe 3** (4 Punkte).
Es sei $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ die Drehmatrix für den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$.

a) Bestimmen Sie $\det(D_\alpha)$. *Hinweis: Das Ergebnis sollte nicht von $\alpha$ abhängen.*

Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ sei $S_v$ die Spiegelung an der Geraden $G_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v\rangle = 0\}$ und sei $w \in \mathbb{R}^2$ so gewählt, dass $\mathcal{B} = (v, w)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S_v)$.

c) Es sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(S_v)$, sowie $\det(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(S_v))$.

d) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $|\det(A)| = 1$ an, so dass $A$ weder eine Drehung noch eine Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ beschreibt.

**Aufgabe 4** (4 Punkte).
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B} = (v, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so dass $\|v\| = 1$ und $v \perp w_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Wir betrachten die wie folgt definierte lineare Abbildung $P$

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ \lambda_1 v + \lambda_2 w_1 + \ldots + \lambda_n w_{n-1} & \longmapsto & \lambda_1 v. \end{array} \right.$$

Außerdem sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

a) Geben Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(P)$ an.

b) Geben Sie die Matrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ an und prüfen Sie nach, dass die erste Zeile von $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = (T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})^{-1}$ gleich $v^T$ ist.

c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(P)$ mit Hilfe von a), b) und des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \overset{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(P)}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^n \\ T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \downarrow & & \uparrow T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \\ \mathbb{R}^n & \overset{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(P)}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

d) Leiten Sie mit Hilfe von c) für $x \in \mathbb{R}^n$ die Formel $P(x) = \langle x, v\rangle \cdot v$ her. Was ist $P$ für eine Abbildung?

**Abgabe:**
Montag, 06.02.2012 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
*Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.*