Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Wir betrachten die Menge der 2-Tupel in den reellen Zahlen, $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$, und definieren die zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie folgt:

$$\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \qquad \begin{aligned}(a_1,b_1)+(a_2,b_2) &= (a_1+a_2, b_1+b_2),\\ (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) &= (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1).\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$ eine kommutative Gruppe ist. Geben Sie das neutrale Element dieser Gruppe an.

b) Zeigen Sie, dass $((\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\{(0,0)\},\cdot)$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element $(1,0)$ ist. Wie lautet das inverse Element zu gegebenem $(a,b)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\{(0,0)\}$ in dieser Gruppe?

c) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Eine reelle Zahl $x\in\mathbb{R}$ wird mit dem Paar $(x,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ identifiziert (d.h. wir schreiben in diesem Kontext $x=(x,0)$). Zudem bezeichnet i das Paar $(0,1)$.
Für jedes Element des Körpers aus Aufgabe 1 gilt dann also

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a+b\cdot i.$$

Die Menge aller solchen Zahlen ist $\mathbb{C} := \{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$. Der Körper $\mathbb{C}$ mit den oben definierten Operationen heißt der *Körper der komplexen Zahlen.*

a) Zeigen Sie: $i^2=-1$.

b) Bestimmen Sie $x,z\in\mathbb{C}$, so dass $(1+2i)x = 1-i$ und $z^2+4=0$. Geben Sie die Lösungen jeweils in der Form $a+bi$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Wir betrachten die Menge $\mathbb{K}[x]$ der Polynome in einer Variablen x mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$.

a) Weisen Sie nach, dass $\mathbb{K}[x]$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

In dem *Polynomring* $\mathbb{K}[x]$ kann man den Begriff der Teilbarkeit genauso wie im Ring der ganzen Zahlen definieren, d.h. für Polynome $p(x),q(x)\in\mathbb{K}[x]$ schreibt man $p(x)|q(x)$, wenn es ein Polynom $r(x)\in\mathbb{K}[x]$ gibt, so dass $r(x)\cdot p(x)=q(x)$ gilt.

b) Begründen Sie: Jedes Polynom $q(x)\in\mathbb{K}[x]$ ist teilbar durch konstante Polynome $p(x)=p_0$ mit $p_0\in\mathbb{K}\backslash\{0\}$ und Vielfache $p(x)=c\cdot q(x)$ mit $c\in\mathbb{K}\backslash\{0\}$ von $q(x)$.

Ein Polynom $q(x)\in\mathbb{K}[x]$, dass nur die in b) betrachteten Teiler besitzt, heißt *irreduzibel.*

c) Entscheiden Sie, ob $q(x)=x^2-2$ als Polynom in $\mathbb{R}[x]$ bzw. als Polynom in $\mathbb{Z}_3[x]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Nun sei die Gruppe $(D_4, \circ)$ der Transfomationen eines Vierecks gegeben, die entsteht, wenn man das Viereck um 90 Grad drehen (R) und außerdem an einer vertikalen Achse spiegeln (S) darf. Die Verknüpfung in dieser sogenannten Diedergruppe ist das Hintereinanderausführen verschiedener Drehungen und Spiegelungen und wird mit $\circ$ bezeichnet. Beispielsweise bedeuted $R \circ S$, dass das Viereck zuerst vertikal gespiegelt und danach um 90 Grad nach rechts gedreht wird. Das neutrale Element 1_{D_4} der Gruppe ist es, gar nichts mit dem Viereck zu machen. Dieses Element heißt *Identität*. Wir betrachten ein Viereck:

$$\begin{array}{ccc} 4 & - & 3 \\ | & & | \\ 1 & - & 2 \end{array}$$

a) Zeichnen Sie das Viereck, nachdem die folgenden Operationen durchgeführt wurden:

$$R, \quad S, \quad R \circ S, \quad S \circ R, \quad (R \circ R) \circ S, \quad S \circ S.$$

b) Zeichnen Sie alle Varianten des Vierecks, die durch das Hintereinanderausführen von (mehreren) Rotationen R und Spiegelungen S entstehen können. Geben Sie jeweils an, wie Sie R und S verknüpft haben. (Hinweis: Die Gruppe D_4 hat 8 Elemente.)

c) Geben Sie die Verknüpfungstafel der möglichen Transformationen an.

d) *[Zusatz] Identifizieren Sie (möglichst) alle Untergruppen von* $(D_4, \circ)$.

Abgabe:
Montag, 14.11.2011 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Bitte jeweils **zu zweit oder zu dritt** *abgeben!*