Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Beweisen Sie Satz 3.3.7 im Lehrbuch von Teschl (siehe Literaturliste zur Vorlesung, das Buch ist im HU-Netz online verfügbar). Sie können den Beweis im Buch als Vorlage benutzen. Führen Sie diesen aber detailliert aus und bemühen Sie sich um eine klare mathematische Ausdrucksweise.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}$,

$$1665x + 1035y = 45 \qquad \text{und} \qquad 10357a + 22482b = -251$$

Sie können dazu ein Computerprogramm, das solche Gleichungen löst, in der Programmiersprache Ihrer Wahl schreiben. In diesem Fall muss der funktionsfähige Programmcode mit abgegeben werden. Ansonsten geben Sie bitte alle Zwischenschritte in dem von Ihnen verwendeten Verfahren an.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sind die folgende Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$

b) $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n^2 - n \end{cases}$

c) $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$

d) $k : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Es sei A eine nichtleere Menge, und $\mathcal{B}(A)$ sei die Menge aller bijektiven Funktionen von A in sich, das heißt

$$\mathcal{B}(A) = \{f : A \to A \,|\, f \text{ bijektiv}\}.$$

Auf $\mathcal{B}(A)$ betrachtet man die Verknüpfung $\circ$ der Verkettung von Funktionen, das heißt für $f, g \in \mathcal{B}(A)$ ist die Abbildung $f \circ g$ definiert wie folgt: Für $a \in A$ ist

$$(f \circ g)(a) := f(g(a)).$$

a) Weisen Sie nach, dass $(\mathcal{B}(A), \circ)$ eine Gruppe ist.
   Hinweis: Man muss auch zeigen, dass die Verkettung zweier Abbildungen $f, g \in \mathcal{B}(A)$ ein Element von $\mathcal{B}(A)$ ist.

b) Es sei $A = \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *affin*, wenn es reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = a \cdot x + b$. Weisen Sie nach, dass die Menge $\mathcal{L}$ der nicht konstanten affinen Abbildungen,

$$\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \exists a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0, \text{ so dass } \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } f(x) = a \cdot x + b\}$$

   eine Untergruppe von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

Abgabe:
Montag, 21.11.2011 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. ***Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.***