Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Wir betrachten zwei Abbildungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, so dass

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 := |x_1| + |x_2|,$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|),$$

für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

a) Weisen Sie nach, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ zwei Normen sind.

b) Zeichnen Sie die drei Mengen $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$ als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

Hinweis: Unter $\|x\|_2$ ist die euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ des Vektors $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gemeint. Sie entspricht der anschaulich natürlichen Länge des Vektors.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sowie $U \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge von V. Angenommen für alle $u_1, u_2 \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $u_1 + u_2 \in U$ und $\lambda \cdot u_1 \in U$.
Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum ist, das heißt U bildet mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ aus V selbst einen Vektorraum.
Hinweis: Sie dürfen das für Gruppen bekannte Untergruppenkriterium verwenden.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1+3t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 \geq 0 \text{ und } x_2 \geq 0 \right\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Entscheiden Sie, ob die folgenden Tripel von Vektoren linear unabhängig sind, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. Geben Sie auch die jeweilige lineare Hülle möglichst explizit an. Welche geometrische Gestalt stellt die lineare Hülle jeweils dar?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Hinweis: Es gibt eine Verbindung zwischen dem zweiten Tripel und Blatt 1 / Aufgaben 1 und 2.

Abgabe:
Montag, 28.11.2011 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. ***Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.***