Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Wir betrachten die Menge M aller quadratischen reellen Polynome in einer Variablen der Form $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. M ist ein Vektorraum (bzgl. der üblichen Addition und skalaren Multiplikation).

a) Geben Sie drei verschiedene Basen von M an.

b) Es sei $p(x) := -1 + 4x + 3x^2$, sowie $p'(x)$, $p''(x)$ die erste und die zweite Ableitung von $p(x)$. Geben Sie $p'(x)$ und $p''(x)$ explizit an und zeigen Sie, dass die drei Polynome $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ eine Basis von M bilden.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Es seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ vorgegeben.

a) Was ist die Dimension von $U := \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$?

b) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ in U?

c) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ in U?

d) *[Zusatz]: Angenommen wir interpretieren v_1, v_2, v_3 als drei Vektoren des $\mathbb{Z}_7$-Vektorraumes $\mathbb{Z}_7^3$. Was ist dann die Dimension von $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$?*

Aufgabe 3 (2+1+1+2* Punkte).
Es seien $a_{j,i} \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, m$ und $i = 1, \ldots, n$, sowie $b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ gegeben.
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{m,1}x_m & = & b_1 \\ a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{m,2}x_m & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_m & = & b_n \end{array}$$

mit n Gleichungen und m Unbekannten, sowie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}y_1 + a_{2,1}y_2 + \ldots + a_{m,1}y_m & = & 0 \\ a_{1,2}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{m,2}y_m & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{1,n}y_1 + a_{2,n}y_2 + \ldots + a_{m,n}y_m & = & 0. \end{array}$$

Das zweite Gleichungssystem wird als *homogen*, das erste entsprechend als *inhomogen* bezeichnet.

a) Es sei L_H die Menge aller Lösungen $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ des homogenen Gleichungssystems.
Begründen Sie: L_H ist stets ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

b) Angenommen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ist eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.
Begründen Sie: Für alle $y \in L_H$ ist $\tilde{x} := x + y$ ebenfalls eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Umgekehrt: Ist ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, so muss es sich bereits als $\tilde{x} = x + y$ mit einem $y \in L_H$ schreiben lassen.

c) Begründen Sie, dass das inhomogene Gleichungssystem entweder keine, genau eine oder unendliche viele Lösungen besitzt. Begründen Sie zunächst über Teil a), dass das homogene Gleichungssystem entweder genau eine oder unendliche viele Lösungen besitzt.

d) *[Zusatz]: Angenommen die Koeffizienten $a_{j,i}$ und b_i, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ sind aus dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Entsprechend werden $+$ und $\cdot$ als Operationen in $\mathbb{K}$ (und nicht in $\mathbb{R}$) interpretiert. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Lösungen aus $\mathbb{K}^m$ des inhomogenen Gleichungssystems entweder 0, 1 oder eine Zweierpotenz (d.h. 2^k mit $k \in \mathbb{N}$) ist.*

Aufgabe 4 (2+2 Punkte).
Es sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt, $e \in V$ ein beliebiger Einheitsvektor und $a \in V$ ein beliebiger Vektor. Wir definieren nun $a_\parallel := \langle e, a \rangle \cdot e$ und $a_\perp := a - \langle e, a \rangle \cdot e$, so dass

$$a = a_\parallel + a_\perp.$$

$a_\parallel$ wird als die (orthogonale) Projektion von a auf e und $a_\perp$ als das orthogonale Komplement von a bezüglich e bezeichnet.

a) Prüfen Sie nach:

- $a_\parallel$ und e sind parallel
- $a_\perp$ und e sind orthogonal
- $a_\parallel$ und $a_\perp$ sind orthogonal

b) Es seien $e := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $a := \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $a_\parallel$ und $a_\perp$ bezüglich e (unter Verwendung des kanonischen Skalarproduktes in $\mathbb{R}^2$).

Abgabe:
Montag, 05.12.2011 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. ***Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.***