

Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Es sei $U = \text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \right) \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^3 .

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion v_{\parallel} des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf U und berechnen Sie den Abstand

$$d(v, U) = \min\{\|v - u\| \mid u \in U\} = \|v_{\parallel} - v\|.$$

c) Zeichnen Sie U , v und v_{\parallel} . Sie können dazu einen Computer verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

a) Berechnen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebene U aus Aufgabe 1, das heißt, bestimmen Sie einen Einheitsvektor $n_U \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, n_U \rangle = 0\}.$$

b) Berechnen Sie den zu n_U parallelen Teil v_p von v aus Aufgabe 1 und begründen Sie, warum $d(U, v) = \|v_p\|$.

c) Berechnen Sie den Abstand von $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und von $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu U .

d) Die Ebene U teilt den \mathbb{R}^3 in zwei Hälften (sogenannte Halbräume). Welche der drei Punkte v, w, x liegen im selben Halbraum bezüglich U ?

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in \mathbb{R} mit dem wie folgt definierten L^2 -Skalarprodukt:

$$\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x] : \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx.$$

- a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \text{span}(\{1, x, x^2\})$ mittels Gram-Schmidt-Verfahren.
- b) Stellen Sie das Polynom $p(x) = 1 - 2x$ in der Basis aus Teil a) dar.
- c) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $r(x)$ von $q(x) = x^4 - 1$ auf U .
- d) Zeichnen Sie die Polynomfunktionen $q(x)$ und $r(x)$ für $x \in [-2, 2]$, der Einsatz eines Computers ist hierbei erlaubt.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Im Lehrbuch von Teschl wird in Abschnitt 13.1.1 das Matched-Filter Konzept zur Informationssuche im Internet behandelt. Lesen Sie den Abschnitt, erfinden Sie zu den drei dort gegebenen Vektoren a_1, a_2, a_3 jeweils ein Dokument aus Überschrift und einem (kurzen) Text. Welches ihrer Dokumente passt am besten zur Suchanfrage {Referenz, html, php}?

Abgabe:

Montag, 12.12.2011 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.