Prof. Dr. Markus Reiß,
Dr. Fares Maalouf, Caroline Löbhard,
Alexander Fromm

Übung zur Linearen Algebra 1 für Informatiker/innen

Aufgabe 1 (4* Punkte).
Es sei $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome in der Variablen x. $\mathbb{R}[x]$ wird als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den üblichen Operationen betrachtet. Für ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ bezeichnet $p'(x)$ die Ableitung von $p(x)$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}[x]$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}[x]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 4\}, \\
E_2 &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(4) = 0\}, \\
E_3 &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, x^2 + 1 \text{ teilt } p(x)\}, \\
E_4 &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p'(x) = x \cdot p(x)\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6* Punkte).
Sind die folgende Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse. Zeichnen Sie die Bildmengen dieser Abbildungen. Sind die Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (2t, t) \end{cases}$

b) $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (2t + 3, t + 1) \end{cases}$

c) $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, t^2 + 1) \end{cases}$

d) $i : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (\cos(x), \sin(x)) \end{cases}$

e) $j : \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2}}(x, y) \end{cases}$

f) $k : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (u^2, u^3) \end{cases}$

Aufgabe 3 (4* Punkte).
Für zwei nichtnegative ganze Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist der Binomialkoeffizient definiert wie folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad (\textit{man liest } n \textit{ über } k),$$

dabei ist $m! = \prod_{i=1}^{m} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot m$ für natürliche Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und es wird $0! = 1$ definiert. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Formel

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dabei sind x und y beliebige reelle Zahlen.
Gilt die Formel auch allgemein für x, y aus einem beliebigen Körper oder sogar Ring?

Aufgabe 4 (4* Punkte).

a) Finden Sie mindestens eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der diophantischen Gleichung $65x + 42y = 1$.

b) Hat $65 - 42 = 23$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_{42}$? Wenn ja, welches?

c) Haben alle Elemente von $\mathbb{Z}_{42}$ multiplikative Inverse in $\mathbb{Z}_{42}$?

d) Finden Sie das multiplikative Inverse von 11 in $\mathbb{Z}_{31}$.

Aufgabe 5 (4* Punkte).
Wir betrachten zwei lineare Gleichungssysteme: Das System 1 hat die Form

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3,25x_2 + 7x_3 &= a \\ 0,5x_1 + x_2 + 2x_3 &= b \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= c, \end{aligned}$$

das System 2 hat die Form

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= a \\ 0,5x_1 + x_2 &= b. \end{aligned}$$

dabei sind a, b, c gegebene reelle Zahlen und $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ bzw. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sind jeweils gesucht.

a) Angenommen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Finden Sie alle Lösungen des Systems 1, sowie alle Lösungen des Systems 2.

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat System 2 keine, für welche genau eine, für welche unendliche viele Lösungen? Ist das System 1 stets lösbar? Interpretieren Sie die Lösbarkeit der beiden Systeme anhand der linearen Abhängigkeit/Unabhängigkeit der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3,25 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat System 1 Lösungen in $\mathbb{Q}^3$?

Aufgabe 6 (4* Punkte).

Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ (bezüglich dem kanonischen Skalarprodukt), wobei $v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$. Weise nach, dass dann

$$V^{(ij)} = \begin{pmatrix} v_{i1}v_{j1} & v_{i1}v_{j2} & \cdots & v_{i1}v_{jn} \\ v_{i2}v_{j1} & v_{i2}v_{j2} & \cdots & v_{i2}v_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{in}v_{j1} & v_{in}v_{j2} & \cdots & v_{in}v_{jn} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist bezüglich dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}B_{kl}$ für beliebige Matrizen $A = (A_{kl})_{1 \le k,l \le n}$, $B = (B_{kl})_{1 \le k,l \le n}$.

Bemerkung: Man nennt $V^{(ij)}$ auch *Tensorprodukt* von v_i und v_j, Schreibweise: $V^{(ij)} = v_i \otimes v_j$.

Abgabe:
Mittwoch, 04.01.2012 bis 15.10 Uhr, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25 Johann von Neumann-Haus
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. ***Bitte jeweils zu zweit oder zu dritt abgeben.***