Math. Z. 124, 79–82 (1972)

Über die Länge der Knotenlinien schwingender Membranen

JOCHEN BRÜNING und DIETER GROMES

Es wird eine asymptotische (untere) Abschätzung für die Länge der Knotenlinien schwingender Membranen angegeben. Das Ergebnis ist ein Analogon zu bekannten Eigenschaften der Nullstellen von Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Probleme.

Wir gehen aus von

Satz 1 ([1], S. 395). *Es bezeichne y_n die n-te Eigenfunktion eines Sturm-Liouvilleschen Problems im Intervall $I=[a,b]$. Dann hat y_n in (a,b) genau $n-1$ (notwendig einfache) Nullstellen.*

Es stellt sich die Frage, ob diese Eigenschaft ein Analogon bei Eigenfunktionen elliptischer Randwertprobleme in höheren Dimensionen hat. Beschränken wir uns dabei auf den zweidimensionalen Fall. Es sei also G ein $s+1$-fach zusammenhängendes Gebiet im R^2 mit hinreichend glattem Rand S; es bezeichne ferner F die Fläche und U den Umfang von G. In G betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad \text{in } G, \\ u &= 0 \quad \text{auf } S. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Aussage von Satz 1, die sich ja nicht unmittelbar übertragen läßt, ist offenbar äquivalent zu der Behauptung, daß die Nullstellen von y_n I in genau n Teile zerlegen. In Analogie dazu können wir nach der Anzahl $k(n)$ der Gebiete fragen, in die G durch die Knotenlinien der n-ten Eigenfunktion u_n von (1) zerlegt wird. Courant bewies ([1], S. 393), daß $k(n) \leqq n$, und Pleijel [4] verschärfte dies zu

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} \leqq \frac{4}{j^2} < 0{,}7, \tag{2}$$

wo j die kleinste Nullstelle der nullten Besselfunktion bezeichnet. Aus (2) ersieht man, daß $k(n)=n$ nur endlich oft auftreten kann; es gibt sogar Beispiele, wo unendlich oft der Fall $k(n)=2$ auftritt [5], so daß $k(n)$ in keiner befriedigenden Beziehung zu n steht. Bekannte Beispiele von Knotenlinien schwingender Membranen [1], [5] legen nun die Vermutung nahe, daß zwar nicht die Anzahl der Teilgebiete, wohl aber die Länge l_n der Knotenlinien mit n gegen unendlich strebt. Setzt man

$$L_n = l_n + \frac{U}{2}, \tag{3}$$

und erklärt man den Inhalt $N-1$-dimensionaler Punktmengen im R^N nach Minkowski ([2], S. 994), so hat (3) auch für $N=1$ einen Sinn, und Satz 1 liefert $L_n = n$. Die Größe L_n kann also als legitime Verallgemeinerung der Anzahl der Nullstellen in höheren Dimensionen angesehen werden. Wir wollen beweisen:

Satz 2. *Es gilt die Abschätzung*

$$L_n \geqq \frac{F\sqrt{\lambda_n}}{2j} - \pi(s-1)\frac{j}{2\sqrt{\lambda_n}}. \tag{4}$$

Mit der Weylschen Beziehung $\lambda_n \sim \frac{4\pi n}{F}$ ergibt sich daraus die

Folgerung. *Es ist*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n^2}{F n} \geqq \frac{\pi}{j^2}. \tag{5}$$

Die Länge der Knotenlinien wächst also mindestens wie $\sqrt{n}$. Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *G_i sei ein s_i+1-fach zusammenhängendes Teilgebiet von G, das nur von den Knotenlinien der Eigenfunktion u_n zum Eigenwert λ_n von (1) und eventuell von S berandet wird, aber keine Knotenlinien im Innern enthält. Bezeichnet F_i die Fläche, U_i den Umfang und r_i den Inkreisradius von G_i, so gilt:*

$$r_i \leqq \frac{j}{\sqrt{\lambda_n}} \leqq \frac{U_i}{2\pi}. \tag{6}$$

Beweis. Die linke Seite der Ungleichung folgt aus der Beziehung $k(1)=1$ und der Monotonieeigenschaft der Eigenwerte ([1], S. 392), die rechte aus der Tatsache, daß unter allen eingespannten Membranen gleichen Umfangs die kreisförmige den tiefsten Grundton hat ([1], S. 402).

Hilfssatz 2. *Für ein $s+1$-fach zusammenhängendes Polygon mit Fläche F, Umfang U und Inkreisradius r gilt die Beziehung*

$$F \leqq U r + (s-1)\pi r^2. \tag{7}$$

Beweis. Für $s=0$ hat Fejes-Tóth in [3] einen Beweis angegeben, der sich beinahe wörtlich auf den Fall $s>0$ übertragen läßt. Sein Hilfssatz 2 ändert sich nur insofern, als sich die Formel

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots = F + L\rho - (s-1)\pi\rho^2$$

anstelle der ursprünglichen ergibt ($s=0$). Beachtet man nämlich, daß man zur Zerlegung eines $s+1$-fach zusammenhängenden Polygons in $k+1$ konvexe

Teilpolygone genau $k+s$ Diagonalen benötigt und bildet man ein Papiermodell wie in [3], so ergibt sich (mit den dortigen Bezeichnungen) für den Gesamtinhalt H der Papierblätter

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{k+1} (F_i + L_i \rho + \pi \rho^2) - \sum_{i=1}^{k+s} (2 d_i \rho + \pi \rho^2) \\ &= F + L\rho - (s-1)\pi \rho^2. \end{aligned}$$

Von hier ab verläuft der Beweis von Hilfssatz 2 wie bei Fejes-Tóth.

Beweis von Satz 2. Wir wenden Hilfssatz 2 auf jedes der durch die Knotenlinien erzeugten Teilgebiete G_i an, $1 \leqq i \leqq k(n)$. Das ist möglich, da die Knotenlinien und S stückweise glatt sind, also G_i durch Polygone approximiert werden kann. Da die rechte Seite von (7) für $s=0$ und $r \leqq U/2\pi$ in r monoton ist, können wir wegen (6) r_i durch $j/\sqrt{\lambda_n}$ ersetzen und erhalten:

$$F_i \leqq U_i \frac{j}{\sqrt{\lambda_n}} + (s_i - 1) \frac{\pi j^2}{\lambda_n}.$$

Summation über i ergibt

$$\begin{aligned} F &\leqq \frac{j}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{i=1}^{k(n)} U_i + \frac{\pi j^2}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{k(n)} (s_i - 1) \\ &\leqq \frac{2j}{\sqrt{\lambda_n}} L_n + (s-1)\pi \frac{j^2}{\lambda_n}, \end{aligned}$$

da offenbar $\sum_{i=1}^{k(n)} U_i = 2L_n$ und $\sum_{i=1}^{k(n)} (s_i - 1) \leqq s-1$.

Tatsächlich ist die in der zweiten Ungleichung links stehende Summe nichts anderes als die Gesamtzahl aller inneren Ränder der G_i minus die Gesamtzahl aller äußeren Ränder der G_i. Nun bringt ein innerer Rand aber offenbar genau dann einen positiven Beitrag zur Summe, wenn er schon innerer Rand von G selbst ist; ein äußerer Rand bringt genau dann einen negativen Beitrag zur Summe, wenn er nicht zugleich auch innerer Rand eines der G_i ist, was zumindest für S zutrifft. Also muß die obige Ungleichung gelten. Das bedeutet aber

$$L_n \geqq \frac{F\sqrt{\lambda_n}}{2j} - (s-1)\pi \frac{j}{2\sqrt{\lambda_n}},$$

wie behauptet.

Offen bleibt die Frage, ob auch eine obere Abschätzung für L_n gilt. Für ein Rechteck mit den Seiten a, b und a^2/b^2 irrational (d.h. es gibt nur einfache Eigenwerte), gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n^2}{Fn} = \frac{4}{\pi}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{L_n^2}{Fn} = \frac{8}{\pi}, \tag{8}$$

was eine solche Vermutung nahelegt. Allerdings ist uns darüber bis jetzt nichts bekannt.

Literatur

1. Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik I, 2. Auflage. Berlin: Springer 1930.
2. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II, 3.2. Leipzig 1923–1927.
3. Fejes-Tóth, L.: Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1**, 273–275 (1950).
4. Pleijel, A.: Remarks on Courant's nodal line theorem. Commun. Pure Appl. Math. **9**, 543–550 (1956).
5. Stern, A.: Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Dissertation, Göttingen 1925.

J. Brüning
Mathematisches Institut
D-3550 Marburg
Universitätsstraße 24
Deutschland

Dr. D. Gromes
Institut für theoretische Physik
D-6900 Heidelberg
Philosophenweg 16
Deutschland

(Eingegangen am 16. Juli 1971)