Math. Z. 137, 75–85 (1974)

Zur Abschätzung der Spektralfunktion elliptischer Operatoren

Jochen Brüning

§ 1. Einleitung

Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\partial\Omega$ ihr Rand. Weiter sei $P=P(x,D)$ ein formal positiver elliptischer Differentialausdruck der Ordnung m mit C^∞ Koeffizienten in Ω. Setzen wir wie üblich $\alpha:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ für $\alpha_i\in\mathbb{Z}_+$, $1\leqq i\leqq n$, ferner $|\alpha|:=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ und schließlich

$$D^\alpha:=(-i)^{|\alpha|}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},\qquad i=\sqrt{-1},$$

so können wir also für $u\in C_0^\infty(\Omega)$, $x\in\Omega$ schreiben:

$$P(x,D)\,u(x)=\sum_{|\alpha|\leqq m}a_\alpha(x)\,D^\alpha u(x).$$

Dabei ist für $|\alpha|\leqq m$ $a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$; ferner ist

$$p(x,\xi):=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\,\xi^\alpha\neq 0$$

für $x\in\Omega$ und $\xi\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Bezeichnet $(.,.)$ das übliche Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$, so ist für $u\in C_0^\infty(\Omega)$ $(Pu,u)\geqq C(u,u)$ mit einem $C>0$. Dann ist P ein symmetrischer Operator in $L^2(\Omega)$ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\Omega)$, besitzt also nach einem klassischen Satz von Friedrichs positive selbstadjungierte Erweiterungen. Eine solche Erweiterung $\tilde{P}$ sei gegeben,

$$\tilde{P}=\int_0^\infty t\,dE_t.$$

Es ist wohlbekannt [7, 10], daß E_t ein Integraloperator mit C^∞ Kern e_t ist; e_t wird als die Spektralfunktion von $\tilde{P}$ bezeichnet. Als Funktion von t ist sie auf jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung bei festem $x,y\in\Omega$; für $x=y$ ist sie sogar monoton. Wir wollen für $x,y\in\Omega$, $t>0$ $e(x,y;t):=e_t(x,y)$ schreiben. Das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion wurde von vielen Autoren untersucht (ein Überblick über die Geschichte dieses Problems und die zu seiner Lösung verwendeten Methoden findet sich in [11]). Das bisher umfassendste Ergebnis erzielte Hörmander [11]. Er bewies u.a.: zu jedem Kompaktum $K\subset\Omega$ gibt es eine Konstante $C(K)$, so daß für $x\in\Omega$, $t>0$ mit der Abkürzung

$$R(x,t):=e(x,x;t)-(2\pi)^{-n}\int_{p(x,\xi)<t} d\xi$$

die Ungleichung

$$|R(x,t)|\leqq C(K)\,t^{\frac{n-1}{m}} \tag{1}$$

gilt; dabei ist der Exponent von t bestmöglich. Wir setzen für $x\in\Omega$

$$C(x):=\inf\{C(K)\,|\,x\in K\subset\Omega,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Einfache Beispiele, etwa das Dirichletproblem für den Δ-Operator, zeigen, daß i.allg. $\lim_{x\to\partial\Omega} C(x)=\infty$ sein muß. Dies führte auf die Vermutung, daß $C(x)$ durch eine Funktion von $\frac{1}{l(x)}$ majorisiert werden kann, wo $l(x):=\operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\}$. Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, daß dies unter zusätzlichen Voraussetzungen über Ω und P tatsächlich der Fall ist. Wir machen also die folgenden

Voraussetzungen. a) Ω sei beschränkt und besitze die gewöhnliche Kegeleigenschaft ([1], S. 11); der Rand $\partial\Omega$ von Ω habe endliches $(n-1)$ dimensionales Minkowskimaß.

b) Die Koeffizienten von $P(x,D)$ seien zusammen mit allen ihren Ableitungen auf $\bar\Omega$ stetig ergänzbar; ferner gebe es eine Konstante $C_1>0$, so daß für $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$p(x,\xi)\geqq C_1|\xi|^m.$$

c) Es gebe ein $k\in\mathbb{N}$, so daß $km>n$ und $\mathscr{D}(\tilde P^k)\subset H^{km}(\Omega)$, wo $H^l(\Omega)$ den Sobolevraum der Ordnung l in Ω bezeichnet ([1], S. 2).

Dann gilt

Satz 1. *Es gibt eine Konstante $C_2>0$, so daß für $x\in\Omega$*

$$C(x)\leqq C_2\frac{1}{l(x)}. \tag{2}$$

Der Exponent von $\frac{1}{l(x)}$ kann durch keinen kleineren ersetzt werden.

Eine Abschätzung der Form (2) wurde zuerst von Avakumović für den Δ-Operator bewiesen [5]; für spezielle elliptische Systeme findet sie sich in [8, 9, 13] und [14]. Schwächere Abschätzungen ähnlicher Form wurden z.B. in [3] und [12] angegeben. Satz 1 stellt eine globale Verschärfung des Ergebnisses von Hörmander dar, beansprucht aber auch deshalb Interesse, weil er unmittelbare Konsequenzen für das asymptotische Verhalten der Anzahlfunktion N von $\tilde{P}$ hat, wobei wie üblich

$$N(t) := \int_{\Omega} e(x, x; t)\, dx$$

die Anzahl der Eigenwerte $\leqq t$ von $\tilde{P}$ angibt. In der Tat ergibt sich aus (2) auf bekannte Weise [5, 8]

Satz 2. *Es gibt eine Konstante C_3, so daß für $t>0$*

$$|N(t) - (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} \int_{p(x,\xi)<t} d\xi\, dx| \leqq C_3\, t^{\frac{n-1}{m}} \log t. \tag{3}$$

Auch (3) war bisher nur in Spezialfällen bekannt, vgl. dazu [6, 5, 8, 9, 13–15] und für eine Übersicht über bekannte Resultate [4].

Zum Beweis von Satz 1 gehen wir folgendermaßen vor: Wir setzen den Operator P zu einem elliptischen Operator P' in $\mathbb{R}^n$ fort, der ebenfalls symmetrisch und halbbeschränkt ist, also auch eine selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{P}'$ besitzt. Deren Spektralfunktion e' genügt in $\bar{\Omega}$ der Abschätzung (1); es reicht also aus, die Differenz $e - e'$ in Ω abzuschätzen. Dazu schätzen wir in § 2 die Differenz der Greenschen Funktionen von $\tilde{P}$ und $\tilde{P}'$ außerhalb eines Winkelraumes der komplexen Ebene ab, wobei wir die von Hörmander in [10] konstruierte Grundlösung zusammen mit Resultaten von Agmon [2] verwenden. Diese Abschätzung ermöglicht dann, wiederum in Verbindung mit (1), die Anwendung eines Taubersatzes von Avakumović (§ 3), woraus dann Satz 1 folgt. In § 4 zeigen wir schließlich anhand eines Gegenbeispiels, daß sich der Exponent von $\frac{1}{l(x)}$ in (2) nicht verbessern läßt.

Aus dieser Skizze wird bereits deutlich, daß der Satz von Hörmander im Beweis von Satz 1 die entscheidende Rolle spielt.

§ 2. Abschätzung Greenscher Funktionen

Nach dem Spektralsatz und unseren Voraussetzungen genügt es offenbar, Satz 1 für eine beliebige Potenz $\tilde{P}^k$ von $\tilde{P}$ zu beweisen. Also können wir o.B.d.A. annehmen, daß $m>n$ und $\mathscr{D}(\tilde{P}) \subset H^m(\Omega)$. Bekanntlich [2] gibt es einen symmetrischen und halbbeschränkten elliptischen Differentialausdruck $P' = P'(x, D)$ der Ordnung m mit C^∞ Koeffizienten in $\mathbb{R}^n$, so daß für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$P'(x, D)\, u(x) = \sum_{|\alpha| \leqq m} a'_\alpha(x)\, D^\alpha u(x)$$

und $a'_\alpha | \Omega = a_\alpha$. Da die Addition einer positiven Konstanten zu $\tilde{P}$ das Ergebnis (2) nicht ändert, können wir auch P' als positiv annehmen. Es sei weiter $\tilde{P}'$ eine selbstadjungierte positive Erweiterung von P', e' ihre Spektralfunktion. Wir schreiben $G_z := (\tilde{P} - z)^{-1}$, $G'_z := (\tilde{P}' - z)^{-1}$ für z

nicht im Spektrum von $\tilde{P}$ bzw. $\tilde{P}'$. Diese Operatoren sind Integraloperatoren mit stetigen und in Ω beschränkten Kernen $G_z(x, y)$ bzw. $G'_z(x, y)$ [2], die man als Greensche Funktionen von $\tilde{P}$ bzw. $\tilde{P}'$ bezeichnet.

Wir wählen nun ein festes ε mit $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ und setzen

$$Z_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\arg z| < \varepsilon\}.$$

Alle unsere weiteren Abschätzungen gelten nur für $z \notin Z_\varepsilon$; dementsprechend werden die auftretenden Konstanten i.allg. von ε abhängen. Wir werden diese Tatsache aber nicht jedesmal ausdrücklich hervorheben. Die für uns wichtigen Ergebnisse über G_z und G'_z von [2] fassen wir im folgenden Hilfssatz zusammen.

Hilfssatz 1. *Es gibt eine Konstante C_4, so daß für $x, y \in \Omega$, $z \notin Z_\varepsilon$ und $|z| \geqq 1$*

$$|G_z(x, y)| + |G'_z(x, y)| \leqq C_4 |z|^{\frac{n-m}{m}}. \tag{4}$$

Ist M eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, die keine Punkte des Spektrums von $\tilde{P}$ oder $\tilde{P}'$ enthält, so ist die linke Seite von (4) für $x, y \in \Omega$, $z \in M$ gleichmäßig beschränkt.

Wie erwähnt machen wir auch Gebrauch von der in [10] konstruierten Grundlösung. Für unsere Zwecke zitieren wir das Ergebnis von Hörmander in folgender Form.

Hilfssatz 2. *Es sei Ω' eine relativ kompakte Umgebung von $\bar{\Omega}$. Dann existiert in Ω' eine Grundlösung F von P'. Ferner gibt es positive Konstanten C', C'', C''', so daß für $x, y \in \Omega$, $z \notin Z_\varepsilon$, $|z| \geqq C'$ und $|\alpha| \leqq m-1$:*

$$\begin{aligned} &|D_x^\alpha F(x, y; z)| \\ &\quad \leqq C'' |x-y|^{-n} |z|^{\frac{|\alpha|-m}{m}} \left(|x-y|\, |z|^{\frac{1}{m}}\right) e^{-2C'''|x-y|\,|z|^{1/m}} \\ &\quad \leqq C'' |x-y|^{-n} |z|^{\frac{|\alpha|-m}{m}} e^{-C'''|x-y|\,|z|^{1/m}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir setzen noch $l(x, y) := \max\{l(x), l(y)\}$ für $x, y \in \Omega$. Dann gilt:

Hilfssatz 3. *Es gibt Konstanten C_5, C_6, C_7, so daß für $x, y \in \Omega$, $z \notin Z_\varepsilon$ und $|z| \geqq C_5$*

$$|G_z(x, y) - G'_z(x, y)| \leqq C_6 |z|^{\frac{n-m}{m}} e^{-C_7 l(x,y) |z|^{1/m}}. \tag{6}$$

Beweis. Nach dem Spektralsatz ist $G_z(x, y) = \overline{G_{\bar{z}}(y, x)}$ und $G'_z(x, y) = \overline{G'_{\bar{z}}(y, x)}$; es genügt also, (7) mit $l(y)$ anstelle von $l(x, y)$ zu beweisen.

Wir wählen nun ein $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leqq 1$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geqq 2$. Weiter sei $\Omega_\sigma := \{x \in \Omega \,|\, l(x) \geqq \sigma\}$ und ρ eine positive Zahl mit $\Omega_{3\rho} \neq \varnothing$. Mit

$$\psi_\rho(x, y) := \psi\left(\frac{x-y}{\rho}\right)$$

führen wir die Funktion

$$E_z(x, y) := \psi_\rho(x, y)\, F(x, y; z)$$

ein. Für $x, y \in \Omega$ und z nicht reell und positiv ergibt die Leibnizregel für mehrere Veränderliche ([1], S. 9):

$$\begin{aligned}(P(x, D_x) - z)&(G_z(x, y) - E_z(x, y))\\ &= \delta(x-y) - \delta(x-y) + \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^{\alpha-\beta}\\ &\quad \cdot \psi_\rho(x, y)\, D_x^\beta F(x, y; z)\\ &=: L_z(x, y).\end{aligned}$$

Für jedes α gibt es eine Konstante C_α mit $|D_x^\alpha \psi_\rho(x, y)| \leqq C_\alpha \rho^{-|\alpha|}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Da in der Summe stets $0 > |\beta| - |\alpha| \geqq |\beta| - m$ und jeder Term der Summe höchstens für $\rho \leqq |x-y| \leqq 2\rho$ von Null verschieden ist, ergibt sich mit (5) für $x, y \in \Omega$, $z \notin Z_\varepsilon$, $|z| \geqq C'$ und $\rho\, |z|^{1/m} \geqq 1$ die Abschätzung

$$|L_z(x, y)| \leqq C \rho^{-n} e^{-C''' \rho |z|^{1/m}}, \tag{7}$$

C passende Konstante. Dieselbe Abschätzung gilt offenbar auch für die durch

$$L'_z(x, y) := (P'(x, D_x) - z)(G'_z(x, y) - E_z(x, y))$$

definierte Funktion. Bezeichnen wir die von den Funktionen L_z und E_z erzeugten Integraloperatoren mit denselben Buchstaben, so ist für $f \in C_0^\infty(\Omega_{3\rho})$ $E_z f \in C_0^\infty(\Omega_\rho)$. Also folgt:

$$\begin{aligned}E_z f &= (G_z(\tilde{P} - z))\, E_z f = G_z((P(x, D_x) - z)\, E_z f)\\ &= G_z(f - L_z f)\end{aligned}$$

oder $(G_z - E_z) f = (G_z L_z) f$.

Da f beliebig ist, folgt für $x \in \Omega$, $y \in \Omega_{3\rho}$, z nicht reell und positiv:

$$G_z(x, y) - E_z(x, y) = \int_{\rho \leqq |x'-y| \leqq 2\rho} G_z(x, x')\, L_z(x', y)\, dx'.$$

Führen wir im rechtsstehenden Integral Polarkoordinaten ein und setzen wir die Abschätzungen (4) und (7) ein, so folgt für $x \in \Omega$, $y \in \Omega_{3\rho}$, $z \notin Z_\varepsilon$, $|z| \geqq C'$ und $\rho\, |z|^{1/m} \geqq 1$:

$$|G_z(x, y) - E_z(x, y)| \leqq C\, |z|^{\frac{n-m}{m}}\, e^{-C''' \rho |z|^{1/m}}.$$

Eine analoge Abschätzung gilt auch für $G'_z - E_z$, wie man sofort sieht. Wählen wir dann zu festem y $3\rho := l(y)$, so folgt die Behauptung des Hilfssatzes unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$l(y)\, |z|^{1/m} \geqq 3.$$

Für $0 \leqq x \leqq 3$ ist aber die Funktion e^{-x} nach unten beschränkt, so daß in diesem Fall (6) aus (4) folgt.

§ 3. Abschätzung der Spektralfunktion

Die Abschätzung von $G_z - G'_z$ liefert eine Abschätzung von $e - e'$ mittels des folgenden Taubersatzes von Avakumović [5].

Hilfssatz 4. *Es sei* $B\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

a) *B ist lokal von beschränkter Schwankung und* $B(0)=0$.

b) *Es gibt ein* $n \in \mathbb{N}$, *so daß* $B(t) = O(t^n)$ *für* $t \to \infty$.

c) *Es gibt eine Konstante* $D_1 > 0$, *so daß für* $t > 0$ *und* $0 < h < 1$ *gilt:* $B(t+h) - B(t) \geqq -D_1 t^{n-1}$.

d) *Für* $\operatorname{Re} s > 0$ *existiert die Funktion*

$$\varphi(s) := \int_0^\infty e^{-st} B(t)\, dt.$$

Ferner besitzt φ eine analytische Fortsetzung in $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < D_2\}$ *und genügt dort der Abschätzung*

$$|\varphi(s)| \leqq D_3.$$

Dann gibt es eine positive Konstante D_4, so daß für $t \geqq \frac{\pi}{D_2}$:

$$|B(t)| \leqq D_4 \left(D_2^n D_3 + \frac{D_1}{D_2} \right) t^{n-1}. \tag{8}$$

Für $x \in \Omega$ wollen wir Hilfssatz 4 anwenden auf die Funktion

$$B_x(t) := e(x, x; t^m) - e'(x, x; t^m), \qquad t > 0.$$

Daß dies möglich ist, zeigt der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 5. a) *Die Funktionen* $t \mapsto e(x, y; t)$ *und* $t \mapsto e'(x, y; t)$, $t > 0$, $x, y \in \Omega$, *sind lokal von beschränkter Schwankung und für* $x = y$ *monoton.*

b) *Es gibt eine Konstante* $C_8 > 0$, *so daß für* $x \in \Omega$ *und* $t > 0$

$$|e(x, x; t)| + |e'(x, x; t)| \leqq C_8\, t^{n/m}. \tag{9}$$

c) *Es gibt eine Konstante* $C_9 > 0$, *so daß für* $x \in \Omega$, $t > 0$ *und* $0 < h < 1$

$$|e'(x, x; (t+h)^m) - e'(x, x; t^m)| \leqq C_9\, t^{n-1}.$$

d) *Für* $\operatorname{Re} s > 0$, $x \in \Omega$, *existiert die Funktion*

$$\psi_x(s) := \int_0^\infty e^{-st}\, dB_x(t).$$

Sie besitzt eine analytische Fortsetzung in $\{s\in\mathbb{C}\,|\,|s|<\frac{1}{2}C_7\,l(x)\}$ *und genügt dort der Abschätzung*

$$|\psi_x(s)|\leqq C_{10}\,l(x)^{-n} \text{ mit einer passenden Konstanten } C_{10}. \tag{10}$$

Beweis. a) Diese Tatsache ist wohlbekannt, s. [7, 10].

b) Diese Ungleichung folgt aus (1) und Formel (3.10) in [3].

c) Dies ist eine unmittelbare Folge von (1).

d) Nach [10], Beweis von Theorem 5.3, haben wir für $f,\ g\in C_0^\infty(\Omega)$ und $\operatorname{Re}s>0$ die Identität

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-st}\{d(E_{t^m}f,g)-d(E'_{t^m}f,g)\}\\ &\qquad=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Z_\varepsilon} e^{-sz^{1/m}}\{(G_z f,g)-(G'_z f,g)\}\,dz,\end{aligned}$$

wobei der auf $\mathring{\mathbb{R}}^1_+$ positive Zweig der m-ten Wurzel zu wählen ist.

Für $x,\ y\in\Omega$ und $z\notin Z_\varepsilon$, $|z|\leqq C_5$ ist nach Hilfssatz 1

$$|G_z(x,y)|+|G'_z(x,y)|\leqq C',$$

C' passende Konstante. Zusammen mit (6) zeigt dies, daß das Dreifachintegral auf der rechten Seite absolut konvergiert; wegen (9) und a) existiert für $\operatorname{Re}s>0$ auch der Kern der linken Seite. Also ist für $x,\ y\in\Omega$, $\operatorname{Re}s>0$:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-st}\,d\big(e(x,y;t^m)-e'(x,y;t^m)\big)\\ &\qquad=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Z_\varepsilon} e^{-sz^{1/m}}\big(G_z(x,y)-G'_z(x,y)\big)\,dz.\end{aligned} \tag{11}$$

Für $|s|\leqq\frac{C_7}{2}\,l(x,y)$ ist dann mit geeigneten Konstanten $C',\ C''$

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\partial Z_\varepsilon} e^{-sz^{1/m}}\big(G_z(x,y)-G'_z(x,y)\big)\,dz\Big|\\ &\quad\leqq\Big(\int_{\substack{\partial Z_\varepsilon\\ |z|\leqq C_5}}+\int_{\substack{\partial Z_\varepsilon\\ |z|>C_5}}\Big)\,e^{|s|\,|z|^{1/m}}\,|G_z(x,y)-G'_z(x,y)|\,d|z|\\ &\quad\leqq C'\Big(1+\int_{C_5}^\infty e^{-\frac{1}{2}C_7\,l(x,y)\,t^{1/m}}\,t^{\frac{n-m}{m}}\,dt\Big)\\ &\quad\leqq C''\,l(x,y)^{-n}.\end{aligned}$$

Damit folgen die Behauptungen über ψ_x.

Nun ergibt sich leicht der

Beweis von Satz 1. Wir überprüfen die Anwendbarkeit von Hilfssatz 4 auf B_x, $x \in \Omega$. Bedingung a) und b) sind erfüllt nach Hilfssatz 5, a) und b). Wegen der Monotonie von $t \mapsto e(x, x; t)$ folgt c) aus Hilfssatz 5, a) und c). Dabei können wir $D_1 := C_9$ wählen.

Für $\operatorname{Re} s > 0$ liefert eine partielle Integration:

$$\varphi_x(s) := \int_0^\infty e^{-st} B_x(t)\, dt = \frac{\psi_x(s)}{s}. \tag{12}$$

Da nach (11) $\psi_x(0) = 0$, definiert (12) die analytische Fortsetzung von φ_x in $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < \frac{1}{2} C_7\, l(x)\}$. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt dann für $x \in \Omega$, $|s| \leqq \frac{1}{4} C_7\, l(x)$ wegen (12) und (10):

$$|\varphi_x(s)| \leqq \tfrac{1}{4} C_7\, C_{10}\, l(x)^{-(n+1)}.$$

Mit $D_3 := \frac{1}{4} C_7\, C_{10}\, l(x)^{-(n+1)} =: C_{11}\, l(x)^{-(n+1)}$ und $D_2 := \frac{1}{4} C_7\, l(x)$ ist also auch Bedingung d) erfüllt. Damit ergibt sich für $t \geqq \dfrac{4\pi}{C_7}\, l(x)^{-1}$:

$$\begin{aligned}|B_x(t)| = |e(x, x; t^m) - e'(x, x; t^m)| &\leqq D_4 \Big(\big(\tfrac{1}{4} C_7\, l(x)\big)^n\, C_{11} \big(l(x)\big)^{-n-1} \\ &\quad + \frac{4\, C_9}{C_7\, l(x)} \Big)\, t^{n-1} =: C_{12} \frac{t^{n-1}}{l(x)},\end{aligned}$$

oder für $l(x)\, t^{1/m} \geqq \dfrac{4\pi}{C_7}$:

$$|e(x, x; t) - e'(x, x; t)| \leqq \frac{C_{12}}{l(x)}\, t^{\frac{n-1}{m}}. \tag{13}$$

Ist $l(x)\, t^{1/m} \leqq \dfrac{4\pi}{C_7}$, so folgt aus (9):

$$|e(x, x; t) - e'(x, x; t)| \leqq C_8 \cdot t^{\frac{n-1}{m}}\, t^{1/m} \leqq \frac{4\, C_8\, \pi}{C_7} (l(x))^{-1}\, t^{\frac{n-1}{m}}. \tag{14}$$

Kombinieren wir (13), (14) und (1), so folgt (2).

§ 4. Ein Gegenbeispiel

Wir wollen anhand eines Beispiels zeigen, daß der Exponent von $l(x)$ in (2) i.allg. nicht verbessert werden kann. Dazu sei

$$\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < \pi \text{ für } 1 \leqq i \leqq n\}$$

und $P_1 = -\Delta$. $\tilde{P}_n$ bezeichne die selbstadjungierte Erweiterung von $-\Delta$ in $L^2(\Omega_n)$, die von der Dirichlet-Randbedingung erzeugt wird. Wir bezeichnen mit e_n die Spektralfunktion von $\tilde{P}_n$ und setzen für $x \in \Omega_n$, $t > 0$:

$$H_n(t) := (2\pi)^{-n}\, t^{n/2} \int_{|\xi|<1} d\xi = (2\pi)^{-n}\, \omega_n\, t^{n/2},$$

ω_n Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, sowie

$$R_n(x, t) := e_n(x, x; t) - H_n(t).$$

Bekanntlich ist für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_n$ und $t > 0$

$$e_n(x, x; t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \sum_{\substack{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \leqq t \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \sin^2 \alpha_1 x_1 \cdot \ldots \cdot \sin^2 \alpha_n x_n .$$

Da für $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ $\sin^2 kx = \sin^2 k(\pi - x)$ und H_n nicht von x abhängt, können wir uns bei allen Abschätzungen auf das Gebiet

$$\Omega_n^+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 < x_i < \frac{\pi}{2},\ 1 \leqq i \leqq n \right\}$$

beschränken. Wir bekommen dann das folgende Ergebnis.

Hilfssatz 6. *Die nach Satz 1 für $x \in \Omega_n$, $t > 0$ und eine passende Konstante C_n gültige Ungleichung*

$$|R_n(x, t)| \leqq \frac{C_n}{l(x)}\, t^{\frac{n-1}{2}} \tag{15}$$

läßt sich hinsichtlich des Exponenten von $\frac{1}{l(x)}$ nicht verschärfen, d.h. ist $0 < \alpha < 1$, so ist

$$\sup_{\substack{x \in \Omega_n^+ \\ t > 0}} (l(x))^{\alpha}\, t^{-\frac{n-1}{2}}\, |R_n(x, t)| = \infty . \tag{16}$$

Beweis. Wir werden den Beweis induktiv führen. Es ist leicht zu sehen, daß für $x = x_1 \in \Omega_1^+$ und $t > 0$

$$e_1(x_1, x_1; t) = H_1(t) - \frac{1}{\pi}\, \frac{\sin 2\sqrt{t}\, x_1}{2 x_1} + R_1'(x_1, t), \tag{17}$$

wobei $\sup_{\substack{x_1 \in \Omega_1^+ \\ t > 0}} |R_1'(x_1, t)| < \infty$. Da $l(x_1) = x_1$, folgt (16) unmittelbar für $n = 1$.

Sei nun (16) für $n - 1 \geqq 1$ schon bewiesen. Wir setzen $x' = x'(x) := (x_1, \ldots, x_{n-1})$ und bemerken, daß für $x \in \Omega_n^+$ $l(x) = \min\{x_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\begin{aligned} e_n(x,x;t) &= \int_0^t H_{n-1}(t-s)\,de_1(x_n,x_n;s) \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{\alpha^2\leqq t\\ \alpha\in\mathbb{N}}}\sin^2\alpha\,x_n\,R_{n-1}(x',t-\alpha^2) \\ &=:H_n'(x_n,t)+R_n'(x,t). \end{aligned} \tag{18}$$

Es ist klar, daß mit $l'(x'):=\min\{x_i|1\leqq i\leqq n-1\}$

$$|R_n'(x,t)|\leqq\sqrt{t}\,\frac{2}{\pi}\,C_{n-1}\,\frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{l'(x')}. \tag{19}$$

Werten wir (18) mit (17) weiter aus, so folgt nach einer einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned} H_n'(x_n,t) &= -\frac{\omega_{n-1}(n-1)}{2^n\pi^{n-1}}\int_0^t(t-s)^{\frac{n-3}{2}} \\ &\cdot\left(\frac{\sqrt{s}}{\pi}-\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\sqrt{s}\,x_n}{2x_n}+R_1'(x_n,s)\right)ds \\ &=:H_n(t)+R_n''(x_n,t)+R_n'''(x_n,t). \end{aligned} \tag{20}$$

Dann ist mit einer passenden Konstanten C_n'

$$|R_n'''(x_n,t)|\leqq C_n'\,t^{\frac{n-1}{2}} \tag{21}$$

und

$$\begin{aligned} R_n''(x_n,t) &= -\frac{(n-1)\,\omega_{n-1}}{(2\pi)^n}\int_0^t(t-s)^{\frac{n-3}{2}}\,\frac{\sin 2\sqrt{s}\,x_n}{2x_n}\,ds \\ &= -\frac{(n-1)\,\omega_{n-1}}{(2\pi)^n}\,x_n^{-n}\int_0^{\sqrt{t}x_n}(t x_n^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\,s\sin 2s\,ds \\ &=:\frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{x_n}\,G(\sqrt{t}\,x_n). \end{aligned} \tag{22}$$

Wir wählen nun ein $y>0$ mit $G(y)>0$ und setzen $t(x_n):=\dfrac{y^2}{x_n^2}$. Dann ergibt sich mit (19), (21) und (22) für festes $x'\in\Omega_{n-1}^+$ und $0<\alpha<1$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x_n\to 0}\left((l(x))^\alpha(t(x_n))^{-\frac{n-1}{2}}R_n'(x',x_n,t(x_n))\right) \\ &=\lim_{x_n\to 0}\left((l(x))^\alpha(t(x_n))^{-\frac{n-1}{2}}R_n'''(x_n,t(x_n))\right)=0 \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x_n \to 0}((l(x))^\alpha \, t(x_n)^{-\frac{n-1}{2}} R_n''(x_n, t))$$
$$= \lim_{x_n \to 0} G(y)\, x_n^{\alpha-1} = \infty .$$

Wegen $R_n(x, t) = R_n'(x, t) + R_n''(x_n, t) + R_n'''(x_n, t)$ folgt daraus die Behauptung (16).

Literatur

1. Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton: Van Nostrand 1965
2. Agmon, S., Kannai, Y.: On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators. Israel J. Math. **5**, 1–30 (1967)
3. Agmon, S.: Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. Arch. rat. Mech. Analysis **28**, 165–183 (1968)
4. Agmon, S.: Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. In: Proceedings of the CIME Conference on Pseudodifferential Operators, (Stresa, 1968) pp. 1–10. Roma: Cremonese 1969
5. Avakumović, V. G.: Seminar über elliptische Eigenwertprobleme. Ausarbeitung Aachen 1965
6. Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin: Springer 1930
7. Gårding, L.: Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators. In: Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen (Lund, 1953) pp. 44–55. Lund: Lunds Universitets Matematiska Institution 1954
8. Gromes, W.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion elliptischer Systeme. Math. Z. **118**, 254–270 (1970)
9. Gromes, W.: Über die Spektralfunktion elliptischer Systeme auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **123**, 340–350 (1971)
10. Hörmander, L.: On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators. In: Some Recent Advances in the Basic Sciences, Vol. 2 (Proceedings of the Annual Science Conference, Belfer Graduate School of Sciences) (New York, 1965–1966). pp. 155–202. New York: Yeshiva University 1969
11. Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta math. **121**, 193–218 (1968)
12. Maruo, K., Tanabe, H.: On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms. Proc. Japan Acad. **47**, 268–270 (1971)
13. Niemeyer, H.: Eine Verschärfung der asymptotischen Gesetze der Hohlraumschwingungen. Arch. rat. Mech. Analysis **7**, 412–433 (1961)
14. Niemeyer, H.: Über die elastischen Eigenschwingungen endlicher Körper. Arch. rat. Mech. Analysis **19**, 24–61 (1965)
15. Tulovskii, V. N.: Asymptotic distribution of eigenvalues of differential operators with variable coefficients. Soviet. Math., Doklady **13**, 1341–1344 (1972)

Dr. Jochen Brüning
Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität
D-3550 Marburg (Lahn)
Lahnberge
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 27. Februar 1974)