Math. Ann. 216, 113—121 (1975)

Indextheorie für eine C*-Algebra von Toeplitzoperatoren

Jochen Brüning

In [4], § 4, wurde die Aufgabe gestellt, alle analytischen Indizes der C^*-Algebra von Toeplitzoperatoren mit Symbol in $AP(\mathbb{R})+C_0(\mathbb{R})$ relativ zum Kommutatorideal zu bestimmen. Wir wollen dies in der vorliegenden Arbeit tun. Dabei zeigt es sich, daß jeder analytische Index über die Algebra der Operatoren mit Symbol in $AP(\mathbb{R})$ faktorisiert, so daß es insbesondere keinen analytischen Index gibt, der die Komponenten der verallgemeinerten Fredholmoperatoren trennt. In § 1 stellen wir die notwendigen Begriffe und einige Hilfsmittel aus der Theorie der W^*-Algebren zusammen; die Struktur der in Frage stehenden Algebra betrachten wir in § 2 und bestimmen damit in § 3 die Gestalt der analytischen Indizes.

Herrn Professor M. Breuer möchte ich für die Einführung in diesen Problemkreis und für zahlreiche Diskussionen herzlich danken.

§ 1. Verallgemeinerte Fredholmoperatoren

Wir benutzen für Fredholmtheorien im wesentlichen die Terminologie von [1, 2, 4] und für W^*-Algebren die von [7].

Es sei $\mathscr{A}$ eine C^*-Algebra mit Einselement $1_{\mathscr{A}}$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{A}^0$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{A}$, mit $\mathscr{A}^d$ die Gruppe der Zusammenhangskomponenten von $\mathscr{A}^0$ und mit $\lambda(\mathscr{A}):\mathscr{A}^0\to\mathscr{A}^d$ den kanonischen Homomorphismus („abstrakter Index von $\mathscr{A}$" nach [6]). Ist $\mathscr{C}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von $\mathscr{A}$ und $\pi_{\mathscr{C}}:\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{C}$ die kanonische Projektion, so werden die Fredholmelemente von $\mathscr{A}$ relativ $\mathscr{C}$ definiert durch $\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C}):=\pi_{\mathscr{C}}^{-1}((\mathscr{A}/\mathscr{C})^0)$, wenn $\mathscr{C}\neq\mathscr{A}$, und $\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{A}):=\mathscr{A}$. Sind zwei Paare $(\mathscr{A}_i,\mathscr{C}_i)$, $i=1,2$, von C^*-Algebren mit abgeschlossenen zweiseitigen Idealen gegeben und ist $\varphi:\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ ein C^*-Homomorphismus mit $\varphi(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{C}_2$ und $\varphi(1_{\mathscr{A}_1})=1_{\mathscr{A}_2}$, so induziert φ einen Homomorphismus $\bar{\varphi}:(\mathscr{A}_1/\mathscr{C}_1)^d\to(\mathscr{A}_2/\mathscr{C}_2)^d$. Unter einem topologischen Index von $(\mathscr{A},\mathscr{C})$ versteht man dann eine Abbildung $\tau:\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})\to I$, I abelsche Gruppe, die den Axiomen I–IV in [4], § 2 genügt. Ist $(\mathscr{A}/\mathscr{C})^d$ abelsch, so ist natürlich $\tau_0(\mathscr{A},\mathscr{C}):=\lambda(\mathscr{A}/\mathscr{C})\circ\pi_{\mathscr{C}}:\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})\to(\mathscr{A}/\mathscr{C})^d$ ein topologischer Index. Weiter sieht man leicht, daß zu jedem topologischen Index τ ein $\bar{\tau}\in\mathrm{Hom}((\mathscr{A}/\mathscr{C})^d,I)$ existiert, so daß $\tau=\bar{\tau}\circ\tau_0$. Ist schließlich $\varphi:\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ ein C^*-Homomorphismus mit $\varphi(\mathscr{C}_1)\subset\mathscr{C}_2$ und $\varphi(1_{\mathscr{A}_1})=1_{\mathscr{A}_2}$, so ist $\tau_0(\mathscr{A}_2,\mathscr{C}_2)\circ\varphi=\bar{\varphi}\circ\tau_0(\mathscr{A}_1,\mathscr{C}_1)$; ist also τ_2 ein topologischer Index von $(\mathscr{A}_2,\mathscr{C}_2)$, so ist $\tau_1:=\tau_2\circ\varphi$ ein topologischer Index von $(\mathscr{A}_1,\mathscr{C}_1)$ und $\overline{\tau_1}=\overline{\tau_2}\circ\bar{\varphi}$.

Es ist von besonderem Interesse, daß für die Klasse der W^*-Algebren eine ausgezeichnete Fredholmtheorie existiert (zum folgenden vgl. [1, 2]). Es sei also $\mathscr{M}$ eine W^*-Algebra und $K\mathscr{M}$ das abgeschlossene zweiseitige Ideal der kompakten Elemente von $\mathscr{M}$, ferner bezeichne $P\mathscr{M}$ bzw. $P_f\mathscr{M}$ die Menge der Projektionen bzw. der endlichen Projektionen von $\mathscr{M}$. Wir benötigen die folgenden einfachen Tatsachen über kompakte Elemente.

Hilfssatz 1. *a) Ist $p \in P\mathcal{M}$, so ist*

$$K(p\mathcal{M}p) = pK\mathcal{M}p\,. \tag{1}$$

b) Ist $\mathcal{N}$ eine W^*-Unteralgebra von $\mathcal{M}$, so ist

$$K\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset K\mathcal{N}\,. \tag{2}$$

Beweis. a) Dies ist eine unmittelbare Folge der Beziehung

$$P_f\mathcal{M} \cap p\mathcal{M}p = P_f(p\mathcal{M}p)\,, \tag{3}$$

die man leicht nachprüft.

b) Sei $p := 1_{\mathcal{N}}$, so daß $\mathcal{N} \subset p\mathcal{M}p$. Nach (1) ist $K\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = (K\mathcal{M} \cap p\mathcal{M}p) \cap \mathcal{N} = pK\mathcal{M}p \cap \mathcal{N} = K(p\mathcal{M}p) \cap \mathcal{N}$, so daß wir $1_{\mathcal{N}} = 1_{\mathcal{M}}$ annehmen können. Sei $x \in K\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ und $|x| = \int_0^\infty \lambda de(\lambda)$ die Spektralzerlegung von $|x|$.

Es folgt aus der Fredholmalternative ([1], Theorem 1) und den Eigenschaften der Spektralschar ([7], 1.11), daß x genau dann kompakt ist relativ zu einer W^*-Unteralgebra $\mathcal{L}$ von $\mathcal{M}$ mit $1_{\mathcal{L}} = 1_{\mathcal{M}}$ und $x \in \mathcal{L}$, wenn $1_{\mathcal{M}} - e(\lambda) \in P_f\mathcal{L}$ für $\lambda > 0$. Wir haben aber für $\lambda > 0$: $1_{\mathcal{M}} - e(\lambda) \in P_f\mathcal{M} \cap P\mathcal{N} \subset P_f\mathcal{N}$, so daß $x \in K\mathcal{N}$ wie behauptet.

Bezeichnen wir nun mit $I(\mathcal{M})$ die Indexgruppe und mit $\dim_{\mathcal{M}}: P_f\mathcal{M} \to I(\mathcal{M})$ die Dimensionsfunktion von $\mathcal{M}$, schreiben wir weiter $r(x)$ bzw. $l(x)$ für den rechten bzw. linken Träger von $x \in \mathcal{M}$, so wird für $x \in \mathrm{Fred}(\mathcal{M}, K\mathcal{M})$ durch

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{M}}(x) := \dim_{\mathcal{M}}(1_{\mathcal{M}} - r(x)) - \dim_{\mathcal{M}}(1_{\mathcal{M}} - l(x))$$

ein topologischer Index $\mathrm{ind}_{\mathcal{M}}: \mathrm{Fred}(\mathcal{M}, K\mathcal{M}) \to I(\mathcal{M})$ definiert. Für wichtige Eigenschaften von $\mathrm{ind}_{\mathcal{M}}$ s. [1]. Wir werden später vom folgenden Hilfssatz Gebrauch machen.

Hilfssatz 2. *a) Ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, so ist $K\mathcal{M} = K\mathcal{M}_1 \oplus K\mathcal{M}_2$, $\mathrm{Fred}(\mathcal{M}, K\mathcal{M}) = \mathrm{Fred}(\mathcal{M}_1, K\mathcal{M}_1) \oplus \mathrm{Fred}(\mathcal{M}_2, K\mathcal{M}_2)$, $I(\mathcal{M}) = I(\mathcal{M}_1) \oplus I(\mathcal{M}_2)$ und für $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Fred}(\mathcal{M}, K\mathcal{M})$*

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{ind}_{\mathcal{M}_1}(x_1) + \mathrm{ind}_{\mathcal{M}_2}(x_2)\,. \tag{4}$$

b) Ist $p \in P\mathcal{M}$, so gibt es einen injektiven Homomorphismus $\beta_p: I(p\mathcal{M}p) \to I(\mathcal{M})$, so daß für $x \in P_f(p\mathcal{M}p)$

$$\dim_{\mathcal{M}}(x) = \beta_p \circ \dim_{p\mathcal{M}p}(x)\,. \tag{5}$$

c) Ist $\mathcal{M}$ vom Typ II_∞, so kann $I(\mathcal{M})$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum gemacht werden. Ist $p \in P\mathcal{M}$ eigentlich unendlich, so wird dann die Abbildung β_p nach b) ein $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus.

Beweis. a) Alle Aussagen folgen unmittelbar aus den Definitionen.

b) Dies ist eine einfache Konsequenz von (3) und der Definition von $I(\mathcal{M})$.

c) Es sei $e \in P_f\mathcal{M}$; wir setzen $0 \cdot e := 0$ und $1 \cdot e := e$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann zwei Familien $(e_i)_{i=1}^{2^n}$, $(f_i)_{i=1}^{2^n}$ von paarweise orthogonalen, äquivalenten, endlichen Projektionen in $\mathcal{M}$, so daß

$$e = \textstyle\sum_{i=1}^{2^n} e_i \quad \text{und} \quad f_i \sim e, \quad 1 \leqq i \leqq 2^n\,.$$

Die Existenz der ersten Familie folgt aus [7], 2.2.13, die der zweiten aus der für $f \in P_f \mathscr{M}$ gültigen Beziehung $f \prec 1_{\mathscr{M}} - f$. In der Tat sieht man zunächst leicht, daß $1_{\mathscr{M}} - f$ eigentlich unendlich ist und den zentralen Träger $1_{\mathscr{M}}$ hat; dann hat man nur noch den Vergleichssatz ([7], 2.1.3) anzuwenden. Nun setzen wir:

$$2^{-n}\dim_{\mathscr{M}}(e) := \dim_{\mathscr{M}}(e_1), \qquad 2^n \dim_{\mathscr{M}}(e) := \dim_{\mathscr{M}}(\textstyle\sum_{i=1}^{2^n} f_i)\,.$$

Man überzeugt sich unschwer davon, daß diese Definition sinnvoll ist. Sei nun $t > 0$; wir betrachten die Dualentwicklung

$$t = \textstyle\sum_{i=-k}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_i = 1, \qquad i \geqq -k\,.$$

Dann gibt es wieder eine Familie $(e_i)_{i=-k}^{\infty}$ paarweise orthogonaler endlicher Projektionen mit $\dim_{\mathscr{M}}(e_i) = 2^{-i}\dim_{\mathscr{M}}(e)$, $i \geqq -k$. Damit definieren wir

$$t \dim_{\mathscr{M}}(e) := \dim_{\mathscr{M}}(\textstyle\sum_{i=-k}^{\infty} \varepsilon_i e_i)\,. \tag{6}$$

Auch diese Definition ist sinnvoll, und man rechnet leicht nach, daß durch (6) auf $I(\mathscr{M})$ eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur definiert wird und daß die Abbildung β_p aus b) für p eigentlich unendlich ein Homomorphismus bzgl. dieser Struktur ist.

Ist nun wieder $\mathscr{A}$ eine C^*-Algebra mit abgeschlossenem zweiseitigen Ideal $\mathscr{C}$, $\mathscr{M}$ eine W^*-Algebra und $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ ein C^*-Homomorphismus mit $\varphi(\mathscr{C}) \subset K\mathscr{M}$ und $\varphi(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{M}}$, so ist $\alpha := \mathrm{ind}_{\mathscr{M}} \circ \varphi$ ein topologischer Index von $(\mathscr{A}, \mathscr{C})$. Einen Index von dieser Gestalt bezeichnet man nun als analytischen Index von $(\mathscr{A}, \mathscr{C})$. Es erhebt sich die Frage, welche topologischen Indizes auch analytische sind, oder anders formuliert, welche Homomorphismen $\bar{\alpha}: (\mathscr{A}/\mathscr{C})^d \to I$ die Eigenschaft haben, daß $\bar{\alpha} \circ \tau_0(\mathscr{A}, \mathscr{C}) = \mathrm{ind}_{\mathscr{M}} \circ \varphi$ für passendes $\mathscr{M}$ und φ. Wir wollen diese Frage für spezielles $\mathscr{A}$ und $\mathscr{C}$ beantworten.

§ 2. Eine spezielle C*-Algebra

Es sei μ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und $H := L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Weiter bezeichne $\mathscr{L}(H)$ die W^*-Algebra der stetigen linearen Operatoren auf H mit dem Einselement 1_H und $F: H \to H$ die Fouriertransformation, d.h. den durch

$$Ff(x) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\,dt\,, \qquad f \in H\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

gegebenen unitären Operator. Die kommutative W^*-Algebra $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ besitzt eine treue W^*-Darstellung π in $\mathscr{L}(H)$ derart, daß $\pi(L^\infty(\mathbb{R}, \mu))$ maximal kommutativ ist ([7], Corollary 2.9.3), definiert durch

$$(\pi(g))f(t) := g(t)f(t)\,, \qquad g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mu)\,, \qquad f \in H\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ist $s \in \mathbb{R}$, so sei $h_s(t) := e^{ist}$, $t \in \mathbb{R}$, und χ_s die charakteristische Funktion von $[0, s]$ bzw. $[s, 0]$ für $s > 0$ bzw. $s \leqq 0$, entsprechend χ_∞ bzw. $\chi_{-\infty}$ die charakteristische Funktion von $[0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0]$. Für $-\infty \leqq s \leqq \infty$ ist dann $p(s) := \pi(\chi_s)$ eine Projektion in $\mathscr{L}(H)$; wir schreiben noch $p := p(\infty)$ und $v := p - p(-\infty)$, so daß $p = \frac{1}{2}(v + 1_H)$. Weiter sei für $s \in \mathbb{R}$ $u(s) := F^* \pi(h_s) F$ die Translation um s, d.h.

$$u(s)f(t) = f(t+s), \qquad f \in H, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Schließlich sei $C_0(\mathbb{R})$ die C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die im Unendlichen verschwinden, und t die C^*-Darstellung von $C_0(\mathbb{R})$ in $\mathscr{L}(H)$ definiert durch

$$t(g) := F^*\pi(g)F\,, \qquad g \in C_0(\mathbb{R})\,.$$

Wir notieren die folgenden Relationen zwischen den eben definierten Operatoren:

$$u(s_1)u(s_2) = u(s_1+s_2) = u(s_2)u(s_1), \qquad u(s)^* = u(-s), \qquad s_1, s_2, s \in \mathbb{R}\,; \tag{7}$$

$$t(g_1)t(g_2) = t(g_1 g_2) = t(g_2)t(g_1), \qquad t(g)^* = t(\bar{g})\,, \qquad g_1, g_2, g \in C_0(\mathbb{R})\,; \tag{8}$$

$$u(s)t(g) = t(h_s g) = t(g)u(s), \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad g \in C_0(\mathbb{R})\,; \tag{9}$$

$$u(s)\pi(g)u(-s) = \pi(u(s)g)\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,, \qquad g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mu)\,; \tag{10}$$

$$p(s) = \operatorname{sign} s \tfrac{1}{2}(v - u(-s)vu(s)) = \operatorname{sign} s \tfrac{1}{2} u(-s)[u(s), v]\,; \tag{11}$$

$$p(s_1) - p(s_2) = u(-s_2)p(s_1 - s_2)u(s_2)\,, \qquad s_1 \geqq s_2 \geqq 0\,. \tag{12}$$

Wir bezeichnen nun mit $\tilde{\mathscr{A}}_1$ die von $(u(s))_{s\in\mathbb{R}}$ und v erzeugte C^*-Unteralgebra von $\mathscr{L}(H)$ und mit $\tilde{\mathscr{A}}$ die von $\tilde{\mathscr{A}}_1$ und $(t(g))_{g\in C_0(\mathbb{R})}$ erzeugte; $\tilde{\mathscr{C}}_1$ bzw. $\tilde{\mathscr{C}}$ sei das Kommutatorideal von $\tilde{\mathscr{A}}_1$ bzw. $\tilde{\mathscr{A}}$.

Hilfssatz 3. *a) Für $g \in C_0(\mathbb{R})$, $x \in \tilde{\mathscr{A}}$ ist $[t(g), x] \in K\mathscr{L}(H)$.*

b) $\tilde{\mathscr{A}}_1$ ist irreduzibel in $\mathscr{L}(H)$.

c) $\tilde{\mathscr{A}} \supset K\mathscr{L}(H)$.

Beweis. a) Nach [5], Lemma 8, ist $[t(g), v] \in K\mathscr{L}(H)$ für $g \in C_0(\mathbb{R})$. Wegen $v^2 = 1_H$ und (9) sind endliche Summen von Elementen der Form

$$x = \lambda a_1 \left(\textstyle\prod_{i=1}^k t(g_i)v\right) a_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad g_i \in C_0(\mathbb{R}), \quad 1 \leqq i \leqq k\,,$$
$$a_j = 1_H \quad \text{oder} \quad a_j = v, j = 1, 2\,, \tag{13}$$

dicht in $\tilde{\mathscr{A}}$, so daß die Behauptung mit (8) folgt.

b) Sei $y \in \tilde{\mathscr{A}}_1' = (\tilde{\mathscr{A}}_1'')'$. Nach (12) ist $\pi(\chi) \in \tilde{\mathscr{A}}_1$, wenn χ die charakteristische Funktion eines endlichen Intervalles ist, also ist $\pi(C_0(\mathbb{R})) \subset \tilde{\mathscr{A}}_1$. Wegen [6], Proposition 4.52 ist aber $C_0(\mathbb{R})$ dicht in $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ bezüglich der schwachen Topologie, so daß $\pi(L^\infty(\mathbb{R}, \mu)) \subset \tilde{\mathscr{A}}_1''$. Da aber diese Algebra maximal kommutativ ist, muß $y = \pi(g)$ für ein $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ sein. Nach (10) muß dann für $s \in \mathbb{R}$ $u(s)g = g$ sein, so daß $\pi(g) = \lambda 1_H$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, wie man leicht sieht. Also ist $\tilde{\mathscr{A}}_1' = \mathbb{C}1_H$ und damit $\tilde{\mathscr{A}}_1$ irreduzibel.

c) Da nicht für jedes $x \in \tilde{\mathscr{A}}$, $g \in C_0(\mathbb{R})[t(g), x] = 0$ sein kann, ist nach a) $\tilde{\mathscr{A}} \cap K\mathscr{L}(H) \neq \{0\}$, so daß die Behauptung aus b) und [6], Theorem 5.39 folgt.

Wir wollen nun die Indextheorie der Algebra $\mathscr{A} := p\tilde{\mathscr{A}}p$ relativ zum Kommutatorideal $\mathscr{C}$ untersuchen. Wir setzen noch $\mathscr{A}_1 := p\tilde{\mathscr{A}}_1 p$ und bezeichnen mit $\mathscr{C}_1$ das Kommutatorideal von $\mathscr{A}_1$ sowie mit $\mathscr{I}$ das von $(pt(g)p)_{g\in C_0(\mathbb{R})}$ in $\mathscr{A}$ erzeugte abgeschlossene zweiseitige Ideal. Es ist klar, daß $\mathscr{A}_1$ von den Operatoren $(pu(s)p)_{s\in\mathbb{R}}$ und $\mathscr{A}$ von $\mathscr{A}_1$ und $(pt(g)p)_{g\in C_0(\mathbb{R})}$ erzeugt wird; vermöge der Identifikation $p\mathscr{L}(H)p = \mathscr{L}(pH)$ können wir $\mathscr{A}_1$ und $\mathscr{A}$ als C^*-Unteralgebren von

$\mathscr{L}(pH)$ auffassen. Zwischen den reduzierten Operatoren gelten folgende Relationen:

$$p(s)p=\begin{cases} p(s)=[pu(s)p, pu(-s)p], & s\geqq 0\,, \\ 0, \quad s<0\,; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &pu(s)pxp=\operatorname{sign} s\, pp(-s)u(s)xp+pu(s)xp \quad \text{und} \\ &pxpu(s)p=\operatorname{sign}(-s)pxu(s)p(s)p+pxu(s)p, \qquad s\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathscr{A}\,; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &pt(g)pxp=\tfrac{1}{2}p[t(g), v]xp+pt(g)xp \quad \text{und} \\ &pxpt(g)p=-\tfrac{1}{2}px[t(g), v]p+pxt(g)p, \qquad g\in C_0(\mathbb{R}), \quad x\in\mathscr{A}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Über die Struktur von $\mathscr{A}$ bzw. $\mathscr{A}_1$ haben wir die folgenden (im wesentlichen bekannten) Resultate.

Hilfssatz 4. *a) $\mathscr{A}_1$ ist irreduzibel in $\mathscr{L}(pH)$ und $K\mathscr{L}(pH)\subset\mathscr{C}$.*

b) Bezeichnet $AP(\mathbb{R})$ die C^*-Algebra der fastperiodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$, so ist

$$\mathscr{A}_1/\mathscr{C}_1\simeq AP(\mathbb{R}) \quad \textit{und} \quad \mathscr{A}/\mathscr{C}\simeq AP(\mathbb{R})+C_0(\mathbb{R})\,.$$

c) Es gibt einen C^*-Homomorphismus $\iota:\mathscr{A}\to\mathscr{A}_1$ mit $\iota(x)=x$ für $x\in\mathscr{A}_1$ und $\iota(x)=0$ für $x\in\mathscr{I}$.

Beweis. a) Es ist $\mathscr{A}_1''=(p\tilde{\mathscr{A}}_1p)''=p\tilde{\mathscr{A}}_1''p=p\mathscr{L}(H)p=\mathscr{L}(pH)$, also $\mathscr{A}_1$ irreduzibel. Weiter ist nach (1) $K\mathscr{L}(pH)=Kp\mathscr{L}(H)p=pK\mathscr{L}(H)p\subset p\tilde{\mathscr{A}}p=\mathscr{A}$. Da $\mathscr{C}\neq 0$, zeigt der Beweis von [6], Proposition 5.5 nun, daß $K\mathscr{L}(pH)\subset\mathscr{C}$.

b) Es folgt aus (15) und (14), daß $pu(s_1)pu(s_2)p-pu(s_1+s_2)p\in\mathscr{C}_1$ für $s_1, s_2\in\mathbb{R}$. Weiter zeigen (16), Hilfssatz 3a) und a), daß für $g\in C_0(\mathbb{R})$ und $x\in\tilde{\mathscr{A}}$ $pt(g)pxp-pt(g)xp\in K\mathscr{L}(pH)\subset\mathscr{C}$. Aus beidem folgt unmittelbar, daß die Elemente der Form

$$x_1=pF^*\pi(g_1)Fp+c_1, \qquad g_1\in AP(\mathbb{R}), \qquad c_1\in\mathscr{C}_1\,, \tag{17}$$

bzw.

$$x=pF^*\pi(g)Fp+pF^*\pi(g_2)Fp+c, \qquad g\in AP(\mathbb{R}), \qquad g_2\in C_0(\mathbb{R}), \qquad c\in\mathscr{C}\,, \tag{18}$$

eine dichte $*$-Unteralgebra von $\mathscr{A}_1$ bzw. $\mathscr{A}$ bilden. Die Argumentation von [3], § 4 zeigt dann, daß jedes $x_1\in\mathscr{A}_1$ bzw. $x\in\mathscr{A}$ eine eindeutige Darstellung dieser Form besitzt, und daß die Abbildungen $x_1\mapsto g_1$ bzw. $x\mapsto g+g_2$ C^*-Isomorphismen $\mathscr{A}_1/\mathscr{C}_1\to AP(\mathbb{R})$ bzw. $\mathscr{A}/\mathscr{C}\to AP(\mathbb{R})+C_0(\mathbb{R})$ liefern.

c) Endliche Summen von Elementen der Form

$$x=\prod_{i=1}^{k} px_ip, \qquad k\in\mathbb{N}, \qquad x_i=u(s_i), \qquad s_i\in\mathbb{R}, \quad \text{oder} \quad x_i=t(g_i) \quad g_i\in C_0(\mathbb{R})\,,$$

$1\leqq i\leqq k$, sind dicht in $\mathscr{A}$. Daraus folgt, daß $\mathscr{A}_1\subset pF^*\pi(AP(\mathbb{R}))Fp+\mathscr{C}_1$, $\mathscr{I}\subset pF^*\pi(C_0(\mathbb{R}))Fp+K\mathscr{L}(pH)$ und $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1+\mathscr{I}$.
Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (18) muß dann $\mathscr{A}_1\cap\mathscr{I}\subset\mathscr{C}_1\cap K\mathscr{L}(pH)$ sein. Wäre $\mathscr{A}_1\cap\mathscr{I}\neq\{0\}$, so folgte wegen a) und [6], Theorem 5.39 $K\mathscr{L}(pH)\subset\mathscr{A}_1$. Nun wurde in [4], § 2 eine treue C^*-Darstellung $\varrho:\tilde{\mathscr{A}}_1\to\tilde{\mathscr{N}}$ angegeben, wo $\tilde{\mathscr{N}}$ ein Faktor vom Typ II_∞ ist. Da $\pi(C_0(\mathbb{R}))\subset\tilde{\mathscr{A}}_1$ (vgl. Beweis von Hilfssatz 3), folgt leicht, daß $\varrho(\tilde{\mathscr{A}}_1)$ schwach dicht ist in $\tilde{\mathscr{N}}$ und damit $\varrho(\mathscr{A}_1)$ schwach dicht in

$\varrho(p)\tilde{\mathcal{N}}\varrho(p)=:\mathcal{N}$, wobei $\mathcal{N}$ ebenfalls ein Faktor vom Typ II_∞ ist. Das Bild einer in $\mathcal{L}(pH)$ eindimensionalen Projektion $e \in K\mathcal{L}(pH) \subset \mathcal{A}_1$ unter ϱ wäre aber in $\mathcal{N}$ eine abelsche Projektion $\neq 0$, so daß aus diesem Widerspruch $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{I}=\{0\}$ folgt. Also besitzt jedes $x \in \mathcal{A}$ eine eindeutige Darstellung

$$x=x_1+x_2 \quad \text{mit} \quad x_1 \in \mathcal{A}_1, \quad x_2 \in \mathcal{I}, \tag{19}$$

und die gesuchte Abbildung ist gegeben durch

$$\imath(x_1+x_2):=x_1\,. \tag{20}$$

§ 3. Analytische Indizes für $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$

Über die abstrakten Indexgruppen von $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ bzw. $(\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1)$ gilt folgendes (s. [4]).

Hilfssatz 5. *Es ist*

$$(\mathcal{A}_1/\mathcal{C}_1)^d \simeq \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad (\mathcal{A}/\mathcal{C})^d \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}\,.$$

Die Abbildung $\imath:\mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$, *definiert in* (20), *induziert den Homomorphismus*

$$\bar{\imath}:\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z} \ni s+m \mapsto s \in \mathbb{R}\,. \tag{21}$$

Beweis. Es bezeichne $C^{\cdot}(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die im Unendlichen konvergieren. Für $g \in C^{\cdot}(\mathbb{R})^0$ bzw. $g \in AP(\mathbb{R})^0$ sei wind(g) die Windungszahl bzw. verallgemeinerte Windungszahl von g. Dann werden die Isomorphismen der Behauptung induziert von den Abbildungen

$$\tau_1: AP(\mathbb{R})^0 \ni g \mapsto \operatorname{wind} g \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\tau_2:(AP(\mathbb{R})+C_0(\mathbb{R}))^0 \ni g+h \mapsto \operatorname{wind} g+\operatorname{wind}\left(1+\frac{h}{g}\right) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}\,,$$

wie man leicht nachweist. (21) ist dann eine einfache Folge davon und von (18) und (20).

Wir bemerken noch, daß für $s \in \mathbb{R}$

$$\tau_1 \circ \tau_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1)(pu(s)p)=\tau_2 \circ \tau_0(\mathcal{A}, \mathcal{C})(pu(s)p)=s \quad \text{gilt}\,. \tag{22}$$

Wir wollen nun C^*-Homomorphismen $\varphi:\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ mit $\varphi(\mathcal{C}) \subset K\mathcal{M}$ und $\varphi(1_{\mathcal{A}})=1_{\mathcal{M}}$ untersuchen. Wir betrachten für $s \geqq 0$ die Projektionen $e(s):=\varphi(p(s))$. Dann ist für $s_1 \geqq s_2 \geqq 0$ $e(s_1) \geqq e(s_2)$ und wegen (12) ist

$$e(s_1)-e(s_2) \sim e(s_1-s_2)\,. \tag{23}$$

Nach (14) ist $p(s) \in \mathcal{C}$, $s \geqq 0$, also ist $e(s) \in P\mathcal{M} \cap K\mathcal{M}=P_f\mathcal{M}$. Ist $e(s_0)>0$ für ein $s_0>0$, so ist für $s \geqq s_0$ $e(s) \geqq e(s_0)>0$. Ist aber $0<s<s_0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $ks \geqq s_0$; wäre $e(s)=0$, so müßte wegen

$$e(ks)=\textstyle\sum_{i=1}^{k}(e(is)-e((i-1)s)) \tag{24}$$

und $e(is)-e((i-1)s) \sim e(s)$, $1 \leqq i \leqq k$, auch $e(ks)=0$ sein. Also ist entweder $e(s)=0$ für jedes $s \geqq 0$ oder $e(s)>0$ für $s>0$. Aus (24) folgt sogar weiter, daß alle $e(s)$ für

$s>0$ denselben zentralen Träger z haben. Wir setzen noch $e:=\sup\{e(s)|s>0\}=\sigma(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)\lim_{s\to\infty} e(s)$, wobei $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)$ die schwache Topologie auf $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Hilfssatz 6. *Ist $e(1)=0$ oder $\mathcal{M}$ vom Typ I, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ kommutativ.*

Beweis. Ist $e(1)=0$, so ist nach dem vorigen $e(s)=0$ für $s\geqq 0$. Wegen (15) ist dann für $x\in\tilde{\mathcal{A}}$, $s\geqq 0$

$$[\varphi(pu(s)p),\varphi(pxp)]=\varphi(pxu(s)p)e(s)=0\,. \tag{25}$$

Wählen wir $x:=t(g)$, $g\in C_0(\mathbb{R})$, so ist nach (15) und (16) $[pu(s)p,\ pt(g)p]=pt(h_s g)p(s)\in K\mathcal{L}(pH)$. Dieser Ausdruck kann aber nicht für jedes $s\geqq 0$ und $g\in C_0(\mathbb{R})$ Null sein, weil sonst stets $pt(g)p(s)=0$ und damit $pt(g)p=0$ wäre, da $p(s)\to p$, $s\to\infty$, in der schwachen Topologie von $\mathcal{L}(pH)$. Also ist $\varphi|K\mathcal{L}(pH)$ nicht injektiv und damit $\varphi|K\mathcal{L}(pH)=0$, da $K\mathcal{L}(pH)$ kein nichttriviales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal besitzt. Mit (16) ist dann für $g\in C_0(\mathbb{R})$, $x\in\tilde{\mathcal{A}}$

$$[\varphi(pt(g)p),\varphi(pxp)]=0\,, \tag{26}$$

also $\varphi(\mathcal{A})$ nach (25) und (26) kommutativ.

Ist $\mathcal{M}$ vom Typ I, so ist $\mathcal{N}:=e(1)\mathcal{M}e(1)$ vom Typ I (endlich). Nach [7], Corollary 2.4.7 gibt es dann eine treue Familie $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ normaler Zustände mit $\psi_\lambda(a^*a)=\psi_\lambda(aa^*)$ für $a\in\mathcal{N}$, $\lambda\in\Lambda$. Andererseits gibt es eine abelsche Projektion q in $\mathcal{N}$ mit dem zentralen Träger $1_{\mathcal{N}}=e(1)$. Da alle $e(s)$ denselben zentralen Träger $e(1)$ in $\mathcal{N}$ haben, ist $q\prec e(s)$ für $s>0$. Wegen (23) muß aber $\lim_{s\to 0}\psi_\lambda(e(s))=0$ sein für $\lambda\in\Lambda$, so daß $q=0=e(1)$ folgt. Nach dem ersten Teil des Beweises ist dann $\varphi(\mathcal{A})$ kommutativ.

Hilfssatz 7. *Ist $\mathcal{M}$ vom Typ II und $\varphi(\mathcal{A})$ schwach dicht in $\mathcal{M}$, so ist $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich und $\varphi|\mathcal{I}=0$.*

Beweis. Sei q eine in $\mathcal{L}(pH)$ eindimensionale Projektion. Dann ist $\varphi(q)\varphi(\mathcal{A})\varphi(q)$ schwach dicht in $\varphi(q)\mathcal{M}\varphi(q)$ und kommutativ, so daß $\varphi(q)=0$, da $\mathcal{M}$ keine abelschen Projektionen besitzt. Da andererseits $q\in K\mathcal{L}(pH)$, muß wie im Beweis des vorigen Hilfssatzes $\varphi|K\mathcal{L}(pH)=0$ sein. Für $g\in C_0(\mathbb{R})$ und $s>0$ ist dann nach (15) und (16)

$$0=\varphi([pu(s)p,pt(h_{-s}g)p])=\varphi(pt(g)p)e(s)$$

und damit

$$\varphi(pt(g)p)e=0\,. \tag{27}$$

Weiter ist für s_1, $s\geqq 0$ nach (12) $p(s_1)pu(s)p=pu(s)u(-s)p(s_1)u(s)p=pu(s)pp(s+s_1)$, so daß für $s_1\to\infty$ folgt:

$$\varphi(pu(s)p)e=e\varphi(pu(s)p)\,. \tag{28}$$

Da $\varphi(\mathcal{A})$ schwach dicht ist in $\mathcal{M}$, ist e nach (27) und (28) eine zentrale Projektion. Mit $e':=1_{\mathcal{M}}-e$ wird durch

$$\mathcal{A}\ni x\mapsto e'\varphi(x)\in e'\mathcal{M}$$

ein C^*-Homomorphismus $\varphi':\mathcal{A}\to e'\mathcal{M}$ definiert mit: $\varphi'(\mathcal{C})\subset Ke'\mathcal{M}$, $\varphi'(1_{\mathcal{A}})=1_{e'\mathcal{M}}$, $\varphi'(\mathcal{A})$ schwach dicht in $e'\mathcal{M}$ und $\varphi'(p(1))=0$. Nach Hilfssatz 6 ist also $e'\mathcal{M}$

kommutativ und damit $e'=0$ und $e=1_{\mathscr{M}}$. Nach (27) ist dann $\varphi|\mathscr{I}=0$ und wegen (23) und

$$1_{\mathscr{M}}=\sum_{i=1}^{\infty}(e(i)-e(i-1))$$

ist $\mathscr{M}$ eigentlich unendlich.

Wir merken an, daß es Homomorphismen der in Hilfssatz 6 und 7 beschriebenen Art gibt. Bezeichnen wir nämlich für den Augenblick mit ϱ_1 den in Hilfssatz 4b) beschriebenen Isomorphismus $\mathscr{A}/\mathscr{C}\to AP(\mathbb{R})+C_0(\mathbb{R})$, so ist $\varphi_1:=\varrho_1\circ\pi_{\mathscr{C}}:\mathscr{A}\to L^\infty(\mathbb{R})$ ein Homomorphismus wie in Hilfssatz 6. Setzen wir ferner mit den Abbildungen ϱ und ι aus Hilfssatz 4c) $\varphi_2:=\varrho\circ\iota:\mathscr{A}\to\mathscr{N}$, so haben wir die Situation von Hilfssatz 7.

Die untersuchten Spezialfälle genügen bereits, um den allgemeinen Fall zu behandeln.

Satz. *Es sei $\mathscr{M}$ eine W^*-Algebra und $\mathscr{N}$ der Summand von $\mathscr{M}$ vom Typ II_∞. Ferner sei $\varphi:\mathscr{A}\to\mathscr{M}$ ein C^*-Homomorphismus mit $\varphi(\mathscr{C})\subset K\mathscr{M}$ und $\varphi(1_{\mathscr{A}})=1_{\mathscr{M}}$. Dann induziert der zugehörige analytische Index $\alpha:=\mathrm{ind}_{\mathscr{M}}\circ\varphi$ von $(\mathscr{A},\mathscr{C})$ den Homomorphismus*

$$\bar{\alpha}:\mathbb{R}\oplus\mathbb{Z}\ni(s,m)\mapsto s\cdot y\in I(\mathscr{N}) \tag{29}$$

mit einem passenden $y\in I(\mathscr{N})$.

Beweis. Wir schreiben $\mathscr{M}=\mathscr{N}\oplus\mathscr{M}_1\oplus\mathscr{M}_2\oplus\mathscr{M}_3$, wo $\mathscr{M}_1$ endlich, $\mathscr{M}_2$ rein unendlich und $\mathscr{M}_3$ vom Typ I_∞, und setzen $\varphi_i(x):=1_{\mathscr{M}_i}\varphi(x)$ für $x\in\mathscr{A}$, $1\leqq i\leqq 3$. Dann ist für $x\in\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})$

$$\mathrm{ind}_{\mathscr{M}_1}\varphi_1(x)=\dim_{\mathscr{M}_1}(1_{\mathscr{M}_1}-r(\varphi_1(x)))-\dim_{\mathscr{M}_1}(1_{\mathscr{M}_1}-l(\varphi_1(x)))=0\,,$$

nach [7], 2.4.2, da $1_{\mathscr{M}_1}$ endlich ist. Wegen $K\mathscr{M}_2=\{0\}$ ist weiter für $x\in\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})$ auch $\mathrm{ind}_{\mathscr{M}_2}\varphi_2(x)=0$. Schließlich ist nach Hilfssatz 6 $\varphi_3(\mathscr{A})$ kommutativ, somit jedes $x\in\varphi_3(\mathscr{A})$ normal; dann ist aber $r(x)=l(x)$ und damit für $x\in\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})$ $\mathrm{ind}_{\mathscr{M}_3}\varphi_3(x)=0$. Mit $\varphi'(x):=1_{\mathscr{N}}\varphi(x)$, $x\in\mathscr{A}$, ergibt sich also nach (4)

$$\mathrm{ind}_{\mathscr{M}}\varphi(x)=\mathrm{ind}_{\mathscr{N}}\varphi'(x)\,,\qquad x\in\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})\,.$$

Es sei nun $\mathscr{N}_1\oplus\mathscr{N}_2$ der schwache Abschluß von $\varphi'(\mathscr{A})$ in $\mathscr{N}$, wobei $\mathscr{N}_1$ vom Typ II_∞ und $\mathscr{N}_2$ ohne Summanden vom Typ II_∞ sei, und $q_i:=1_{\mathscr{N}_i}$, $i=1,2$, so daß $q_1+q_2=1_{\mathscr{N}}$. Weiter setzen wir $\varphi_i'(x):=q_i\varphi'(x)$, $i=1,2$. Nach (2) ist dann $\varphi_i'(\mathscr{C})\subset K\mathscr{N}_i$ und natürlich $\varphi_i'(1_{\mathscr{A}})=q_i$, $i=1,2$. Wir bekommen also wie eben für $x\in\mathrm{Fred}(\mathscr{A},\mathscr{C})$:

$$\mathrm{ind}_{\mathscr{N}}\varphi'(x)=\dim_{\mathscr{N}}(q_1-r(\varphi_1'(x)))-\dim_{\mathscr{N}}(q_1-l(\varphi_1'(x)))\,.$$

Nach Hilfssatz 7 ist q_1 eigentlich unendlich, also auch $q_1\mathscr{N}q_1$. Wir erhalten deshalb mit (5)

$$\mathrm{ind}_{\mathscr{N}}\varphi'(x)=\beta_{q_1}(\mathrm{ind}_{q_1\mathscr{N}q_1}(\varphi_1'(x)))\,.$$

Ebenfalls nach Hilfssatz 7 ist $\varphi_1'|\mathscr{I}=0$; es gibt also einen C^*-Homomorphismus $\varphi_0:\mathscr{A}_1\to q_1\mathscr{N}q_1=:\mathscr{N}_0$ mit $\varphi_1'=\varphi_0\circ\iota$. Wegen $\iota(\mathscr{C})=\mathscr{C}_1$ ist $\varphi_0(\mathscr{C}_1)\subset K\mathscr{N}_0$ und ferner $\varphi_0(1_{\mathscr{A}_1})=\varphi_0\circ\iota(1_{\mathscr{A}})=1_{\mathscr{N}_0}$. Wir wollen den von $\alpha_0:=\mathrm{ind}_{\mathscr{N}_0}\circ\varphi_0$ induzierten Homomorphismus $\bar{\alpha}_0:\mathbb{R}\to I(\mathscr{N}_0)$ bestimmen. Nach (22) ist für $s\in\mathbb{R}$

$$\bar{\alpha}_0(s)=\mathrm{ind}_{\mathscr{N}_0}\varphi_0(pu(s)p)\,.$$

Wir setzen für $s \geqq 0$ $f(s) := \varphi_0(pu(s)p)$ und wie vorher $e(s) := \varphi_0(p(s))$. Aus (15) folgt $pu(s)pu(-s)p = p$, $pu(-s)pu(s)p = p - p(s)$, also $f(s)f(s)^* = 1_{\mathcal{N}_0}$, $f(s)^* f(s) = 1_{\mathcal{N}_0} - e(s)$ und damit $l(f(s)) = 1_{\mathcal{N}_0}$, $r(f(s)) = 1_{\mathcal{N}_0} - e(s)$. Mit (23) und der Definition (6) sieht man schließlich leicht, daß $s\dim_{\mathcal{N}_0} e(1) = \dim_{\mathcal{N}_0} e(s)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_0(s) &= \dim_{\mathcal{N}_0}(1_{\mathcal{N}_0} - r(f(s))) - \dim_{\mathcal{N}_0}(1_{\mathcal{N}_0} - l(f(s)))\\ &= \dim_{\mathcal{N}_0}(e(s)) = s\dim_{\mathcal{N}_0}(e(1))\end{aligned}$$

und insgesamt:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(s, m) &= \beta_{q_1} \circ \bar{\alpha}_0 \circ \bar{\iota}(s, m) = \beta_{q_1} \circ \bar{\alpha}_0(s) = s\beta_{q_1}(\dim_{\mathcal{N}_0}(e(1)))\\ &=: sy, \qquad y \in I(\mathcal{N}),\end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Literatur

1. Breuer, M.: Fredholm theories in von Neumann algebras I und II. Math. Ann. **178**, 243—254 (1968) und Math. Ann. **180**, 313—325 (1969)
2. Breuer, M., Butcher, R. S.: A generalized Riesz-Schauder decomposition theorem. Math. Ann. **203**, 221—230 (1973)
3. Coburn, L. A., Douglas, R. G.: On C^*-algebras of operators on a half-space I. Pupl. Math. I.H.E.S. No. **40**, 59—67 (1971)
4. Coburn, L. A., Douglas, R. G., Schaeffer, D. G., Singer, I. M.: On C^*-algebras of operators on a half-space II, Index theory. Publ. Math. I.H.E.S. No. **40**, 69—80 (1971)
5. Cordes, H. O.: The algebra of singular integral operators in $\mathbb{R}^n$. Jour. Math. Mech. **14**, 1007—1032 (1965)
6. Douglas, R. G.: Banach algebra techniques in operator theory. New York: Academic Press 1972
7. Sakai, S.: C^*-algebras and W^*-algebras. Berlin Heidelberg New York: Springer 1971

Dr. Jochen Brüning
Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität
D-3550 Marburg (Lahn)
Lahnberge
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 23. Dezember 1974)