Math. Ann. 220, 47—58 (1976) — © by Springer-Verlag 1976

Eine Verallgemeinerung eines Satzes von N. Kuiper

Jochen Brüning und Wolfgang Willgerodt
Fachbereich Mathematik der Universität, D-3550 Marburg/BRD

Vojislav G. Avakumović zum 65. Geburtstag gewidmet

Kuiper [3] bewies 1964, daß die Gruppe der invertierbaren stetigen Endomorphismen eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes zusammenziehbar ist bzgl. der Operatornormtopologie. Dieses Ergebnis wurde von Breuer [2] auf W^*-Algebren vom Typ I_∞ oder II_∞ und von Singer (unveröffentlicht) auf Faktoren vom Typ III übertragen, wobei aber stets eine Separabilitätsvoraussetzung gemacht werden mußte. Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß für jede eigentlich unendliche W^*-Algebra $\mathscr{M}$ die Gruppe $\mathscr{M}^0$ der regulären Elemente — und damit auch die unitäre Gruppe $\mathscr{M}^u$ — zusammenziehbar ist (Satz 1). Wir zerlegen dazu völlig analog zu [3] den Beweis in vier Schritte (§ 1). Es zeigt sich dann, daß nur Schritt 2 zusätzliche Überlegungen erfordert. Nach einigen Vorbereitungen, die Projektionen in W^*-Algebren betreffen (§ 2), führen wir dann in § 3 die erforderliche Konstruktion auf einen Satz über die Existenz gewisser mit einem gegebenen positiven Element vertauschbarer Projektionen zurück (Satz 3).

§ 1. Reduktion des Beweises

Es sei $\mathscr{M}$ eine komplexe W^*-Algebra mit dem Einselement $1_{\mathscr{M}}$; $\mathscr{M}^0$ bezeichne die Gruppe der invertierbaren und $\mathscr{M}^u$ die Gruppe der unitären Elemente von $\mathscr{M}$. Wir wollen folgenden Satz beweisen.

Satz 1. *Ist $\mathscr{M}$ eigentlich unendlich, so verschwinden alle Homotopiegruppen von $\mathscr{M}^0$.*

Aus diesem Satz ergeben sich unmittelbar zwei Folgerungen.

Folgerung 1. *Ist $\mathscr{M}$ eigentlich unendlich, so ist $\mathscr{M}^0$ zusammenziehbar.*

Beweis. [3], Theorem (2).

Folgerung 2. *Ist $\mathscr{M}$ eigentlich unendlich, so ist $\mathscr{M}^u$ zusammenziehbar.*

Beweis. Die Abbildung $r:\mathscr{M}^0 \ni x \mapsto x(x^*x)^{-\frac{1}{2}} \in \mathscr{M}^u$ ist eine Retraktion von $\mathscr{M}^0$ auf $\mathscr{M}^u$.

Bevor wir mit dem Beweis von Satz 1 beginnen, wollen wir noch folgendes bemerken. Nach [1], Theorem 3.3 ist $\pi_1(\mathcal{M}^u) \neq 0$, wenn $\mathcal{M}$ eine endliche W^*-Algebra ist. Da jede W^*-Algebra die direkte Summe einer endlichen und einer eigentlich unendlichen ist, ist also $\mathcal{M}^u$ genau dann zusammenziehbar, wenn $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich ist, wie in [1] vermutet. Weiter merken wir an, daß der zu führende Beweis von Satz 1 sich auch auf reelle W^*-Algebren übertragen läßt.

Zum Beweis von Satz 1 genügt es offenbar zu zeigen, daß für jede kompakte Teilmenge K von $\mathcal{M}^0$ die Injektion $i: K \hookrightarrow \mathcal{M}^0$ homotop in $\mathcal{M}^0$ zur konstanten Abbildung $c: K \to 1_{\mathcal{M}}$ ist. Nach dem in [3] gegebenen Vorbild vollziehen wir diese Deformation in vier Schritten.

Schritt 1. Es gibt einen endlichdimensionalen simplizialen Komplex $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}^0$ sowie eine stetige Abbildung $c_1: K \to \mathcal{K}$, so daß i homotop zu c_1 in $\mathcal{M}^0$ ist.

Beweis. [3], Lemma (1) mit dem alternativen Beweis von Atiyah.

Schritt 2. Es gibt in $\mathcal{M}$ orthogonale und zu $1_{\mathcal{M}}$ äquivalente Projektionen e, f, so daß

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{M}^0_{e,f} := \{x \in \mathcal{M}^0 \,|\, f x e = 0\}.$$

Beweis. Die Konstruktion der Projektionen e und f stellt die Hauptschwierigkeit bei allen Verallgemeinerungen des Kuiperschen Satzes dar; wir werden sie in § 3 durchführen.

Schritt 3. Sind e und f wie in Schritt 2 und wird

$$\mathcal{M}^0_e := \{x \in \mathcal{M}^0 \,|\, ex = xe = e\}$$

gesetzt, so gibt es eine stetige Abbildung $c_2: \mathcal{M}^0_{e,f} \to \mathcal{M}^0_e$, die in $\mathcal{M}^0$ homotop ist zu der Injektion $i_1: \mathcal{M}^0_{e,f} \hookrightarrow \mathcal{M}^0$.

Beweis. Wir werden die behauptete Homotopie als formales Analogon der in [3] angegebenen [Lemma (3)] konstruieren; zur Terminologie s. § 2.

Für $x \in \mathcal{M}^0$ schreiben wir $xe = u_x|xe|$ (Polarzerlegung), wobei $|xe| = (ex^*xe)^{\frac{1}{2}}$ und $u_x \in \mathcal{M}$ mit $u_x^* u_x = \mathrm{r}(xe) = s(|xe|) = e$. Da $x^*x \in \mathcal{M}^0$, gibt es ein $\delta(x) > 0$, so daß $x^*x \geqq \delta(x) 1_{\mathcal{M}}$, somit $|xe|^2 \geqq \delta(x) e$. Also ist $|xe|$ invertierbar in der reduzierten Algebra $e\mathcal{M}e$; das Inverse bezeichnen wir mit $|xe|^{-1}$. Es folgt, daß die Abbildungen $\mathcal{M}^0 \ni x \mapsto |xe| \in e\mathcal{M}e$, $\mathcal{M}^0 \ni x \mapsto |xe|^{-1} \in e\mathcal{M}e$ und $\mathcal{M}^0 \ni x \mapsto u_x = xe|xe|^{-1} \in \mathcal{M}$ normstetig sind. Für $x \in \mathcal{M}^0_{e,f}$ ist dann $f u_x = f xe|xe|^{-1} = 0 = u_x^* f$. Es sei $u \in \mathcal{M}$ mit $u^*u = e$ und $uu^* = f$. Wir setzen nun für $x \in \mathcal{M}^0_{e,f}$, $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} h(s, x) :&= \cos \frac{\pi s}{2} (f + u_x u_x^*) + \sin \frac{\pi s}{2} (u_x u^* - u u_x^*) \\ &\quad + 1_{\mathcal{M}} - f - u_x u_x^*. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $h(s, x) h(s, -x) = h(s, -x) h(s, x) = 1_{\mathcal{M}}$, so daß $h(s, x) \in \mathcal{M}^0$; ferner ist h sicher stetig. Für $x \in \mathcal{M}^0_{e,f}$, $s \in [0, 1]$ wird also durch

$$g(s, x) := h(s, -1_{\mathcal{M}}) h(s, x) x$$

eine Homotopie in $\mathscr{M}^0$ von $g(0,\cdot)=i_1$ nach $g(1,\cdot)$ definiert; wir haben dann

$$\begin{aligned} g(1,x)e &= (u-u^*)(u_x u^* - uu_x^*)u_x|xe| \\ &= (u^*-u)uu_x^*u_x|xe| \\ &= |xe|\,. \end{aligned}$$

Wir setzen nun diese Homotopie für $s\in[1,2]$ folgendermaßen fort:

$$g(s,x):=(1_{\mathscr{M}}-e+(2-s)e+(s-1)|xe|^{-1})g(1,x)\,.$$

Dies ist offensichtlich eine stetige Fortsetzung, und wir haben $g(2,x)e=(1_{\mathscr{M}}-e+|xe|^{-1})g(1,x)e=e$.

Ferner gibt es ein $\varepsilon(x)>0$ mit $|xe|^{-1}\geqq\varepsilon(x)e$, so daß $1_{\mathscr{M}}-e+(2-s)e+(s-1)|xe|^{-1}\geqq 1_{\mathscr{M}}-e+((2-s)+\varepsilon(x)(s-1))e\geqq\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon(x)}{2}\right\}1_{\mathscr{M}}$; also verläuft die Homotopie in $\mathscr{M}^0$. Schließlich setzen wir für $s\in[2,3]$, $x\in\mathscr{M}^0_{e,f}$:

$$g(s,x):=e+(3-s)eg(2,x)(1_{\mathscr{M}}-e)+(1_{\mathscr{M}}-e)g(2,x)(1_{\mathscr{M}}-e)\,.$$

Wegen $g(2,x)=g(2,x)e+g(2,x)(1_{\mathscr{M}}-e)=e+g(2,x)(1_{\mathscr{M}}-e)$ ist dies wiederum eine stetige Fortsetzung und wegen $g(3,x)e=eg(3,x)=e$ sind wir (mit $c_2(x):=g(3,x)$) am Ziel, wenn wir noch zeigen, daß die Homotopie in $\mathscr{M}^0$ bleibt. Setzen wir abkürzend $y:=g(2,x)$, so rechnet man unter Benutzung von $yey^*=e$ und der Tatsache, daß $yy^*\geqq\delta(y)1_{\mathscr{M}}$ mit $\delta(y)>0$, leicht nach, daß

$$\begin{aligned} g(s,x)g(s,x)^* &= (1-(3-s)^2)e \\ &\quad +((3-s)e+1_{\mathscr{M}}-e)yy^*((3-s)e+1_{\mathscr{M}}-e) \\ &\geqq (1+(\delta(y)-1)(3-s)^2)e+\delta(y)(1_{\mathscr{M}}-e)\,. \end{aligned}$$

Also ist $|g(s,x)^*|=(g(s,x)g(s,x)^*)^{\frac{1}{2}}\in\mathscr{M}^0$ und $\mathrm{s}(|g(s,x)^*|)=\mathrm{l}(g(s,x))=1_{\mathscr{M}}$. Wegen der Polarzerlegung brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß $\mathrm{r}(g(s,x))=1_{\mathscr{M}}$. Wegen $y^{-1}=e+y^{-1}(1_{\mathscr{M}}-e)$ ist $1_{\mathscr{M}}=e+ey(1_{\mathscr{M}}-e)+y^{-1}(1_{\mathscr{M}}-e)y(1_{\mathscr{M}}-e)$, woraus $\mathrm{r}((1_{\mathscr{M}}-e)y(1_{\mathscr{M}}-e))=1_{\mathscr{M}}-e$ folgt; da aber $(1_{\mathscr{M}}-e)g(s,x)=(1_{\mathscr{M}}-e)y(1_{\mathscr{M}}-e)$, ist $\mathrm{r}(g(s,x))\geqq 1_{\mathscr{M}}-e$, also $\mathrm{r}(g(s,x))=:1_{\mathscr{M}}-p$ mit $0\leqq p\leqq e$. Dann ist aber

$$0=eg(s,x)p=ep=p\,,$$

womit die Konstruktion beendet ist.

Schritt 4. Die Injektion $i_2:\mathscr{M}^0_e\hookrightarrow\mathscr{M}^0$ ist homotop zur konstanten Abbildung $c:\mathscr{M}^0_e\to 1_{\mathscr{M}}$.

Beweis. Dies ist ein bekanntes Resultat von Eilenberg, das sich in [3] und [2] findet.

Es ist klar, daß die Kombination dieser vier Schritte den Beweis von Satz 1 liefert.

§ 2. Einige Tatsachen über Projektionen

Wir wollen zunächst an einige Grundlagen aus der Theorie der W^*-Algebren erinnern, von denen wir häufig Gebrauch machen werden; alle ohne Beweis angeführten Tatsachen können aus [4] entnommen werden. Ist $\mathcal{M}$ eine W^*-Algebra, so sei $P\mathcal{M}:=\{p\in\mathcal{M}\,|\,p^2=p^*=p\}$ die Menge der Projektionen, $\mathcal{M}^s:=\{x\in\mathcal{M}\,|\,x=x^*\}$ die Menge der Hermiteschen Elemente und $\mathcal{M}^+:=\{x\in\mathcal{M}\,|$ es gibt $y\in\mathcal{M}$ mit $x=y^*y\}$ die Menge der positiven Elemente von $\mathcal{M}$. Für $x,y\in\mathcal{M}^s$ schreiben wir $x\geqq y$ genau dann, wenn $x-y\in\mathcal{M}^+$. Dadurch wird eine Halbordnung auf $\mathcal{M}^s$ definiert; sind $p,q\in P\mathcal{M}$, so ist $p\geqq q$ genau dann, wenn $pq=q$. Für $x\in\mathcal{M}$ definieren wir den linken Träger $\mathrm{l}(x)$ von x durch $\mathrm{l}(x):=\inf\{p\in P\mathcal{M}\,|\,px=x\}$ und analog den rechten Träger $\mathrm{r}(x)$; dann ist $\mathrm{l}(x),\mathrm{r}(x)\in P\mathcal{M}$. Ist $x\in\mathcal{M}^s$, so ist $\mathrm{l}(x)=\mathrm{r}(x)=:\mathrm{s}(x)$, der Träger von x. Setzen wir für $x\in\mathcal{M}\,|x|:=(x^*x)^{\frac{1}{2}}$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $u\in\mathcal{M}$ mit $x=u|x|$ und $u^*u=\mathrm{r}(x)$, $uu^*=\mathrm{l}(x)$ (Polarzerlegung von x).

Wir nennen nun zwei Projektionen $p,q\in P\mathcal{M}$ äquivalent, in Zeichen $p\sim q$, wenn es ein $u\in\mathcal{M}$ gibt mit $p=u^*u$, $q=uu^*$; insbesondere ist also $\mathrm{l}(x)\sim\mathrm{r}(x)$ für jedes $x\in\mathcal{M}$. Weiter nennen wir eine Projektion p endlich, wenn aus $q\in P\mathcal{M}$ und $p\sim q\leqq p$ stets $q=p$ folgt; die Menge aller endlichen Projektionen von $\mathcal{M}$ bezeichnen wir mit $P_f\mathcal{M}$. Eine nicht endliche Projektion heißt unendlich.

Das Zentrum $Z\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ ist eine kommutative W^*-Algebra, $PZ\mathcal{M}$ somit die Menge der zentralen Projektionen von $\mathcal{M}$.

Für jedes $p\in P\mathcal{M}$ existiert dann der zentrale Träger $c(p)\in PZ\mathcal{M}$, definiert durch $\mathrm{c}(p):=\inf\{z\in PZ\mathcal{M}\,|\,zp=p\}$.

Wir definieren nun eigentlich unendliche Projektionen:

$p\in P\mathcal{M}$ heißt eigentlich unendlich, wenn für jedes $z\in PZ\mathcal{M}$ mit $zp>0$ zp unendlich ist. Jedes unendliche $p\in P\mathcal{M}$ besitzt dann eine eindeutig bestimmte Zerlegung $p=p_1+p_2$, wo p_1 und p_2 orthogonale Projektionen sind mit p_1 endlich, p_2 eigentlich unendlich und $\mathrm{c}(p_1)\mathrm{c}(p_2)=0$. $\mathcal{M}$ heißt endlich bwz. unendlich bzw. eigentlich unendlich, wenn $1_{\mathcal{M}}$ endlich bzw. unendlich bzw. eigentlich unendlich ist.

Schließlich definieren wir mit Hilfe der Relationen $\leqq$ und $\sim$ eine neue Relation $\prec$ („geschweift kleiner") auf $P\mathcal{M}$:

für $p,q\in PM$ ist $p\prec q$ genau dann, wenn es $q'\in P\mathcal{M}$ gibt mit $p\sim q'\leqq q$. Diese neue Relation ist eine Halbordnung und (im Sinne von Hilfssatz 1,2) „fast" eine Totalordnung. Daher wird sie uns die Konstruktion der in Schritt 2 gesuchten Projektionen e und f ermöglichen; ihre wichtigsten Eigenschaften und Konsequenzen stellen wir im nächsten Hilfssatz zusammen.

Hilfssatz 1. 1) *Es sei A eine Indexmenge und $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(q_\alpha)_{\alpha\in A}$ Familien paarweise orthogonaler Projektionen in $\mathcal{M}$ mit $p_\alpha\prec q_\alpha$ für $\alpha\in A$. Dann ist $\sum_{\alpha\in A}p_\alpha\prec\sum_{\alpha\in A}q_\alpha$.*

2) *Es seien $p,q\in P\mathcal{M}$; dann gibt es $z\in PZ\mathcal{M}$ mit $zp\prec zq$ und $(1_{\mathcal{M}}-z)p\succ(1_{\mathcal{M}}-z)q$.*

3) *Ist $q\in P\mathcal{M}$, $p\in P_f\mathcal{M}$ und $q\prec p$, so ist $q\in P_f\mathcal{M}$.*

4) *Das Supremum endlich vieler endlicher Projektionen ist endlich.*

5) *Ist $p\in P\mathcal{M}$ eigentlich unendlich, so gibt es orthogonale Projektionen p_1, p_2 in $\mathcal{M}$ mit $p_1\sim p_2$ und $p=p_1+p_2$.*

6) *Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset P\mathcal{M}$ eine Familie paarweise orthogonaler Projektionen und q eine eigentlich unendliche Projektion mit $p_n\prec q$ für jedes n, so ist auch $\sum_{n\in\mathbb{N}}p_n\prec q$.*

7) *Sind $p,q\in P\mathcal{M}$ mit q endlich, p eigentlich unendlich und $q\leqq p$, so ist $q\prec p-q\sim p$.*

Beweis. 1) [4], S. 79.

2) [4], Theorem 2.1.3.

3) Diese Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition.

4) Es genügt offenbar, den Fall zweier Projektionen p_1, p_2 zu behandeln. Wegen [4], Proposition 2.1.5 und Teil 3 dieses Hilfssatzes kann man weiter $p_1 p_2 = 0$ annehmen und wegen Teil 2 sogar $p_1 \prec p_2$ oder $p_2 \prec p_1$. In diesem Fall folgt die Behauptung dann aus [4], Lemma 2.5.3.

5) Nach [4], Proposition 2.2.4 gibt es eine Familie $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P\mathcal{M}$ von paarweise orthogonalen Projektionen mit $\tilde{p}_n \sim p$ für jedes n und $p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{p}_n$. Setzen wir $p_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{p}_{2n}$, $p_2 := \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{p}_{2n-1}$, so ist $p_1 p_2 = 0$, $p_1 + p_2 = p$ und nach Teil 1 dieses Hilfssatzes $p_1 \sim p_2$.

6) Diese Behauptung folgt aus [4], Proposition 2.2.4 und Teil 1.

7) In Hilfssatz 2 unten beweisen wir eine etwas allgemeinere Tatsache; wir führen die Behauptung hier nur der Übersichtlichkeit halber auf.

Mit diesen Hilfsmitteln wollen wir nun ein Prinzip angeben, um zwei orthogonale, äquivalente, eigentlich unendliche Projektionen aus gewissen gegebenen Projektionen zu konstruieren.

Um präziser zu sein, benötigen wir eine weitere Definition. Ist $p \in {}_p\mathcal{M}$ eigentlich unendlich, so sei

$$A_p := \{q \in P\mathcal{M} \mid \mathrm{c}(q) \leqq \mathrm{c}(p) \text{ und für } z \in PZ\mathcal{M} \text{ mit } 0 < z \leqq \mathrm{c}(q) \text{ ist } zq \precnsim zp\}; \tag{1}$$

A_p kann man auffassen als die Menge der Projektionen, die bzgl. $\prec$ echt kleiner sind als p. Mit q enthält A_p auch zq für jedes $z \in PZ\mathcal{M}$; weiter folgt es leicht aus Hilfssatz 1,2, daß A_p jedes endliche q mit $\mathrm{c}(q) \leqq \mathrm{c}(p)$ enthält. Die folgende Eigenschaft ist weniger offensichtlich.

Hilfssatz 2. *Es sei $p \in P\mathcal{M}$ eigentlich unendlich. Dann ist A_p abgeschlossen unter der Bildung endlicher orthogonaler Summen.*

Ist $q \in A_p$ mit $q \leqq p$, so ist

$$q \prec p - q \sim p, \tag{2}$$

also insbesondere $q \in A_{p-q}$.

Beweis. Offenbar können wir uns auf den Fall zweier Projektionen $p_1, p_2 \in A_p$ beschränken mit $p_1 p_2 = 0$. Nehmen wir an, es wäre nicht $p_1 + p_2 \in A_p$; dann gibt es $z \in PZ\mathcal{M}$ mit $0 < z \leqq \mathrm{c}(p_1 + p_2) = \sup\{\mathrm{c}(p_1), \mathrm{c}(p_2)\} \leqq \mathrm{c}(p)$ und $z(p_1 + p_2) \sim zp$. Nach Hilfssatz 1,2 gibt es $z' \in PZ\mathcal{M}$ mit $z'zp_1 \prec z'zp_2$ und $(1_{\mathcal{M}} - z')zp_1 \succ (1_{\mathcal{M}} - z')zp_2$. Nehmen wir an, daß $z'z > 0$ [der Fall $(1_{\mathcal{M}} - z')z > 0$ verläuft analog]. Dann ist $z'zp_2$ unendlich, da anderenfalls nach Hilfssatz 1,3 und 4 $0 < z'zp \sim z'zp_1 + z'zp_2 \in P_f\mathcal{M}$.

Also gibt es $z'' \in PZ\mathcal{M}$ mit $0 < z'' \leqq \mathrm{c}(p_2)$ und $z''p_2$ eigentlich unendlich. Nach Hilfssatz 1,6 folgt dann aber $z''p \sim z''p_1 + z''p_2 \prec z''p_2 \prec z''p$ oder $z''p_2 \sim z''p$ im Widerspruch zu $p_2 \in A_p$. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Sei weiter $q \in A_p$ mit $q \leqq p$. Dann ist $p - q$ eigentlich unendlich, denn sonst gäbe es $z \in PZ\mathcal{M}$ mit $0 < z(p-q) \in P_f\mathcal{M}$ und damit $z(p-q) \in A_p$; aus dem schon Bewiesenen folgt dann aber $0<zp=z(p-q)+zq\in A_p$, was sicherlich absurd ist. Ferner ist $\mathrm{c}(p-q)=\mathrm{c}(p)$; andernfalls gäbe es wegen $\mathrm{c}(p-q)\leqq\mathrm{c}(p)$ ein $z\in PZ\mathscr{M}$ mit $0<z\leqq\mathrm{c}(p)$ und $z(p-q)=0$ oder $0<zp=zq\in A_p$. Hilfssatz 1,2 liefert uns nun ein $z'\in PZ\mathscr{M}$ mit $z'q\succ z'(p-q)$ und $(1_{\mathscr{M}}-z')q\prec(1_{\mathscr{M}}-z')(p-q)$. Wäre $z'q>0$, so auch $z'(p-q)$; damit muß aber $z'q$ unendlich sein, da $p-q$ eigentlich unendlich ist. Also gibt es $z''\in PZ\mathscr{M}$ mit $0<z''\leqq\mathrm{c}(q)$ und $z''q$ eigentlich unendlich; dann liefert Hilfssatz 1,6 aber $z''p=z''(p-q)+z''q\prec z''q\prec z''p$ oder $z''p\sim z''q$ im Widerspruch zu $q\in A_p$. Also ist $z'q=0$ oder $1_{\mathscr{M}}-z'\geqq\mathrm{c}(q)$; damit folgt schließlich $q\prec(1_{\mathscr{M}}-z')(p-q)\leqq p-q$ und nach Hilfssatz 1,6 $p-q\leqq p\prec p-q$.

Wir betrachten nun eigentlich unendliche Projektionen p einer speziellen Struktur, nämlich mit folgender Eigenschaft:

es gibt eine abzählbare Familie paarweise orthogonaler Projektionen

$$(p_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset A_p,\quad \text{so daß}\quad p=\sum_{i\in\mathbb{N}}p_i\,. \tag{3}$$

Wir können dann jedes $q\in A_p$ mit endlichen Summen der p_i majorisieren in folgendem Sinne.

Hilfssatz 3. *Zu jedem $q\in A_p$ mit $q>0$ gibt es ein $z\in PZ\mathscr{M}$ mit $0<z\leqq\mathrm{c}(q)$ und ein $k\in\mathbb{N}$, so daß*

$$zq\prec\sum_{i=1}^{k}zp_i\,. \tag{4}$$

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe ein $q\in A_p$ ohne die behauptete Eigenschaft. Wir setzen $\tilde{p}_i:=\mathrm{c}(q)p_i$, $i\in\mathbb{N}$, und $\tilde{p}_0:=0$. Wir wollen nun induktiv eine Familie $(q_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ paarweise orthogonaler Projektionen konstruieren mit $q_i\leqq q$ und $q_i\sim\tilde{p}_i$, $i\in\mathbb{Z}_+$; nach Hilfssatz 1,1 folgt dann $\mathrm{c}(q)p=\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\tilde{p}_i\sim\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}q_i\leqq q\prec\mathrm{c}(q)p$, und aus diesem Widerspruch ergibt sich die Behauptung. Natürlich muß $q_0=0$ sein; sei eine Familie $(q_i)_{i=0}^{n}$ paarweise orthogonaler Projektionen mit $q_i\sim\tilde{p}_i$ und $q_i\leqq q$, $0\leqq i\leqq n$, schon konstruiert. Wir setzen $\tilde{q}:=q-\sum_{i=0}^{n}q_i$; nach Hilfssatz 1,2 gibt es ein $z\in PZ\mathscr{M}$ mit $z\tilde{q}\prec z\tilde{p}_{n+1}$ und $(1_{\mathscr{M}}-z)\tilde{q}\succ(1_{\mathscr{M}}-z)\tilde{p}_{n+1}$. Wäre $zq>0$, so wäre auch $0<z':=z\mathrm{c}(q)=\inf\{z,\mathrm{c}(q)\}$, und es folgte mit Hilfssatz 1,1

$$z'q=z'\tilde{q}+\sum_{i=0}^{n}z'q_i\prec z'\tilde{p}_{n+1}+\sum_{i=0}^{n}z'\tilde{p}_i=\sum_{i=0}^{n+1}z'p_i$$

im Widerspruch zur Annahme. Also ist $zq=0$ oder $1_{\mathscr{M}}-z\geqq\mathrm{c}(q)$ und damit $\tilde{q}\succ\tilde{p}_{n+1}$. Nach Definition gibt es also q_{n+1} mit $\tilde{p}_{n+1}\sim q_{n+1}\leqq\tilde{q}$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Zu einer gegebenen eigentlich unendlichen Projektion p aus $\mathscr{M}$ mit der Eigenschaft (3) betrachten wir die von $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $Z\mathscr{M}$ erzeugte kommutative W^*-Unteralgebra von $\mathscr{M}$, die wir mit $\mathscr{N}_p$ bezeichnen. In $\mathscr{N}_p$ können wir jetzt eine abzählbare Familie paarweise orthogonaler Projektionen konstruieren, die bzgl. $\prec$ monoton wächst.

Hilfssatz 4. *Es sei p eine eigentlich unendliche Projektion in $\mathscr{M}$ mit der Eigenschaft (3). Dann gibt es eine Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{N}_p$ von paarweise orthogonalen Projektionen mit $e_1>0$ und $e_i\prec e_{i+1}$, $i\in\mathbb{N}$.*

Beweis. Ist z irgendeine zentrale Projektion mit $0<z\leqq c(p)$, so genügt es offensichtlich, den Beweis in der reduzierten W^*-Algebra $z\mathcal{M}$ zu führen. Nach evtl. Reduktion mit $c(p_1)$ können wir also annehmen, daß $c(p_1)=c(p)=1_{\mathcal{M}}$. Weiter können wir wegen [4], Proposition 1.18.1 aus demselben Grund annehmen, daß $Z\mathcal{M}\simeq L^\infty(\Omega,\mu)$, wo Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum ist und μ ein positives Radonmaß mit $\mu(\Omega)=1$. Unter diesem Isomorphismus identifizieren wir die zentralen Projektionen von $\mathcal{M}$ mit den charakteristischen Funktionen der μ-meßbaren Teilmengen von Ω.

Wir setzen jetzt $z_1:=1_{\mathcal{M}}$ und $\tilde{e}_1:=p_1$, so daß $c(p_1)=z_1$. Wir wollen induktiv Familien paarweise orthogonaler Projektionen $(\tilde{e}_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{N}_p\cap A_p$ und $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset PZ\mathcal{M}$ konstruieren mit folgenden Eigenschaften:

a) $z_i\geqq z_{i+1}$ und $\mu(z_i-z_{i+1})\leqq\dfrac{1}{2^{i+1}}$,

b) $z_i=c(\tilde{e}_i)$ und $z_{i+1}\tilde{e}_i\prec\tilde{e}_{i+1}$,

c) es gibt ein $k_i\in\mathbb{N}$, so daß $p_j\tilde{e}_i=0$ für $j\geqq k_i$, $i\in\mathbb{N}$.

Wenn die Konstruktion durchgeführt ist, setzen wir $z:=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$; dann ist $\mu(1_{\mathcal{M}}-z)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(z_i-z_{i+1})\leqq\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{i+1}}=\dfrac{1}{2}$ und $\mu(z)=\mu(1_{\mathcal{M}})-\mu(1_{\mathcal{M}}-z)\geqq\dfrac{1}{2}$, d. h. $z>0$. Also ist auch $z_n>0$ für jedes n und damit wegen b) auch $\tilde{e}_n$. Setzen wir nun $e_i:=z\tilde{e}_i$, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Für $i=1$ haben wir die Konstruktion schon durchgeführt, denn mit $k_1:=2$ ist ja auch c) erfüllt. Seien nun paarweise orthogonale Projektionen $(\tilde{e}_i)_{i=1}^n\subset\mathcal{N}_p\cap A_p$ und $(z_i)_{i=1}^n\subset PZ\mathcal{M}$ mit den Eigenschaften a), b), c) bereits konstruiert. Es sei $k:=\max\limits_{1\leqq i\leqq n}k_i$ und $\tilde{p}:=\sum\limits_{j=k}^{\infty}p_j$.

Nach Hilfssatz 2 ist $\tilde{p}\sim p$; also ist insbesondere $\tilde{p}$ eigentlich unendlich und hat die Eigenschaft (3). Ferner ist $\tilde{p}$ orthogonal zu $\tilde{e}_i$ und $\tilde{e}_i\in A_{\tilde{p}}$, $1\leqq i\leqq n$. Da $\tilde{e}_n>0$, gibt es nach Hilfssatz 3 ein $z\in PZ\mathcal{M}$ mit $0<z\leqq z_n=c(\tilde{e}_n)$ und ein $m\in\mathbb{N}$, $m\geqq k$, so daß

$$z\tilde{e}_n\prec\sum_{j=k}^{m}zp_j\,. \tag{5}$$

Es sei nun $(z_\alpha)_{\alpha\in A}\subset PZ\mathcal{M}$ eine maximale Familie paarweise orthogonaler Projektionen derart, daß $0<z_\alpha\leqq z_n$ und (5) gilt für z_α mit einem passenden $m_\alpha\in\mathbb{N}$ für jedes $\alpha\in A$; eine solche Familie existiert nach dem Zornschen Lemma. Dann ist $\sum\limits_{\alpha\in A}z_\alpha=z_n$, da sonst mit Hilfssatz 3 ein Widerspruch zur Maximalität folgen würde. Schließlich muß wegen $\mu(z_n)\leqq 1$ A abzählbar sein, so daß $\mu(z_n)=\sum\limits_{\alpha\in A}\mu(z_\alpha)$. Folglich gibt es eine endliche Teilmenge A' von A mit

$$\mu\left(z_n-\sum_{\alpha\in A'}z_\alpha\right)=\mu(z_n)-\sum_{\alpha\in A'}\mu(z_\alpha)\leqq\frac{1}{2^{n+1}}\,. \tag{6}$$

Wir setzen dann $z_{n+1}:=\sum\limits_{\alpha\in A'}z_\alpha$ und mit $m':=\max\limits_{\alpha\in A'}m_\alpha$ $\tilde{e}_{n+1}:=\sum\limits_{j=k}^{m'}z_{n+1}p_j$. Dann ist $\tilde{e}_{n+1}\in\mathcal{N}_p\cap A_p$ und $\tilde{e}_i\tilde{e}_{n+1}=0$, $1\leqq i\leqq n$; ferner ist c) erfüllt, wenn wir $k_{n+1}:=$

$m'+1$ setzen. Wegen $A' \subset A$ und (6) ist a) erfüllt. Nach Konstruktion ist weiter $z_{n+1}\tilde{e}_n \prec \tilde{e}_{n+1}$, woraus $c(\tilde{e}_{n+1}) \geqq c(z_{n+1}\tilde{e}_n) = z_{n+1}$ folgt; da aber sicher $c(\tilde{e}_{n+1}) \leqq z_{n+1}$ nach Definition, ist auch b) erfüllt und der Beweis beendet.

Wir werden weiterhin nur folgende Konsequenz von Hilfssatz 4 verwenden.

Folgerung. *Es sei p wie in Hilfssatz 4. Dann gibt es Projektionen f_1, $f_2 \in \mathcal{N}_p$ mit* a) $f_1 f_2 = 0$, b) $f_1 \sim f_2$, c) f_1 *und* f_2 *eigentlich unendlich.*

Beweis. Mit der Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus Hilfssatz 4 setzen wir:

$$f_1 := \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i-1}\,, \qquad f_2 := \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i}\,.$$

Dann ist f_1, $f_2 \in \mathcal{N}_p$ und a) erfüllt. Wegen $e_{2i-1} \prec e_{2i} \prec e_{2i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, folgt mit Hilfssatz 1,1 $f_1 \prec f_2 \prec f_1$ und damit b). Sei schließlich $z \in PZ\mathcal{M}$ mit $zf_1 > 0$ und $n_0 := \min\{i \in \mathbb{N} | ze_{2i-1} > 0\}$. Dann sieht man wie eben, daß

$$zf_1 = \sum_{i=n_0}^{\infty} ze_{2i-1} \sim \sum_{i=n_0+1}^{\infty} ze_{2i-1} < zf_1\,,$$

so daß zf_1 unendlich ist. Also ist f_1 und damit wegen b) auch f_2 eigentlich unendlich.

§ 3. Ausführung von Schritt 2

Da $\mathcal{K}$ ein endlichdimensionaler simplizialer Komplex ist, ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}^0_{e,f}$, wenn dies für die endlich vielen Ecken von $\mathcal{K}$ gilt. Es genügt also zu zeigen, daß es zu jeder endlichen Teilmenge A von $\mathcal{M}$ orthogonale Projektionen e, $f \in P\mathcal{M}$ mit $e \sim f \sim 1_{\mathcal{M}}$ und $A \subset \mathcal{M}^0_{e,f}$ gibt. Nach Hilfssatz 1,5 gibt es $e_0 \in P\mathcal{M}$ mit $e_0 \sim 1_{\mathcal{M}} - e_0 \sim 1_{\mathcal{M}}$. Diese Bemerkung in Verbindung mit einem einfachen Induktionsargument zeigt, daß sich die Existenz dieser Projektionen aus dem folgenden Satz ergibt.

Satz 2. *Es seien e, f orthogonale und eigentlich unendliche Projektionen in $\mathcal{M}$ mit $e \sim f \sim 1_{\mathcal{M}}$ und $t \in \mathcal{M}$. Dann gibt es Projektionen e_1, $f_1 \in P\mathcal{M}$ mit*

$$e \sim e_1 \leqq e\,, \qquad f \sim f_1 \leqq f \quad \text{und} \quad f_1 t e_1 = 0\,. \tag{7}$$

Der Beweis von Satz 2 folgt recht einfach aus Satz 3, der das Hauptresultat dieser Arbeit darstellt und auch unabhängig von der Anwendung hier interessant ist.

Satz 3. *Es sei $x \in \mathcal{M}^+$ und $s(x)$ eigentlich unendlich. Dann gibt es $p_1, p_2 \in P\mathcal{M}$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $p_1 p_2 = 0$,

b) $p_1 + p_2 \leqq s(x)$,

c) $p_1 \sim p_2 \sim s(x)$,

d) $p_i x = x p_i$ *für* $i = 1,2$.

Wir wollen zunächst Satz 2 mit Satz 3 beweisen.

Beweis von Satz 2. Wir setzen $f_0 := l(fte)$, $e_0 := r(fte)$, so daß $f_0 \leqq f$, $e_0 \leqq e$ und $e_0 \sim f_0$. Sind e_0, $f_0 \in P_f M$, so setzen wir $e_1 := e - e_0$, $f_1 := f - f_0$, und sind damit dann nach Hilfssatz 1,7 fertig.

Andernfalls gibt es $z_1, z_2 \in PZ\mathscr{M}$ mit $z_1 z_2 = 0$, $z_1 + z_2 = c(e_0) = c(f_0)$ und $z_1 e_0$, $z_1 f_0$ endlich und $z_2 e_0$, $z_2 f_0$ eigentlich unendlich. Wir bilden nun die Polarzerlegung $z_2 fte = v|z_2 fte|$, wobei $v^*v = s(|z_2 fte|) = z_2 e_0$ und $vv^* = z_2 f_0$. Nach Satz 3 (mit $x := |z_2 fte|$) gibt es Projektionen p_1, p_2 mit den Eigenschaften a) bis d). Wir setzen nun $q_i := vp_i v^* \leqq z_2 f_0$, so daß $q_i \sim p_i \sim z_2 e_0 \sim z_2 f_0$, $i = 1,2$. Weiter ist $q_1 z_2 ftep_2 = q_1 v|z_2 fte|p_2 = vp_1 v^* vp_2 |z_2 fte| = 0$. Damit setzen wir

$$e_1 := e(1_{\mathscr{M}} - c(e_0)) + z_1(e - e_0) + z_2(e - e_0) + p_2\,,$$
$$f_1 := f(1_{\mathscr{M}} - c(f_0)) + z_1(f - f_0) + z_2(f - f_0) + q_1\,.$$

Dann ist $e_1 \leqq e$, $f_1 \leqq f$ und $f_1 te_1 = f_1 ftee_1 = q_1 ftep_2 = q_1 z_2 ftep_2 = 0$. Nach Hilfssatz 1,7 ist $z_1(e - e_0) \sim z_1 e$, $z_1(f - f_0) \sim z_1 f$ und nach Konstruktion $p_2 \sim z_2 e_0$, $q_1 \sim z_2 f_0$, so daß mit Hilfssatz 1,1 $e_1 \sim e$, $f_1 \sim f$ folgt, womit Satz 2 bewiesen ist.

Wir kommen nun zum

Beweis von Satz 3. Wir merken zunächst zwei Vereinfachungen des Beweises an. Erstens genügt es, den Satz zu beweisen mit den Behauptungen a), b), d) und

c′) $p_1 \sim p_2$ und p_1 eigentlich unendlich.

Wir können dann nämlich nach dem Zornschen Lemma eine maximale Familie $(p_{1\alpha}, p_{2\alpha})_{\alpha \in A} \subset P\mathscr{M}$ von paarweise orthogonalen Projektionen finden derart, daß jedes Paar $p_{1\alpha}, p_{2\alpha}$ die Eigenschaften a), b), c′) und d) hat. Setzen wir dann $\tilde{p}_i := \sum_{\alpha \in A} p_{i\alpha}$, $i = 1,2$, so haben auch $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ die erwähnten Eigenschaften. Wegen der Maximalität muß dann $s(x) - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ endlich sein, also nach Hilfssatz 1,7 $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \sim s(x)$; nach Hilfssatz 1,6 ist weiter $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \prec \tilde{p}_1$ und $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \prec \tilde{p}_2$, also $\tilde{p}_1 \sim \tilde{p}_2 \sim s(x)$.

Zweitens sei eine Zerlegung $x = x_1 + x_2$ gegeben mit $x_1, x_2 \in \mathscr{M}^+$ und $x_1 x_2 = 0$. Nach [4], Proposition 1.10.4 ist dann auch $s(x_1)s(x_2) = 0$ und $s(x) = s(x_1) + s(x_2)$. Ist etwa $s(x_1)$ unendlich und $z \in PZ\mathscr{M}$ mit $zs(x_1) = s(zx_1)$ eigentlich unendlich, so genügt es dann, den Satz für zx_1 statt x zu beweisen, da eine mit zx_1 vertauschbare Projektion $p \leqq zs(x_1)$ wegen der Orthogonalität von x_1 und x_2 auch mit x vertauschbar ist.

Es sei nun o.B.d.A. $\|x\| = 1$; wir betrachten die Spektraldarstellung von x ([4], Abschnitt 1.11):

$$x = \int_0^{1+} \lambda de(\lambda)\,.$$

Wir müssen mehrere Fälle unterscheiden.

Fall 1. Für jedes $\varepsilon \in (0, \infty)$ ist $1_{\mathscr{M}} - e(\varepsilon) \in P_f\mathscr{M}$. Nach Definition der Spektralschar ist

$$s(x) = \sup\{1_{\mathscr{M}} - e(\varepsilon) | \varepsilon > 0\} = 1_{\mathscr{M}} - e(1) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(e\left(\frac{1}{i}\right) - e\left(\frac{1}{i+1}\right)\right).$$

Also besitzt $s(x)$ die Eigenschaft (3). Da jede Projektion in $\mathscr{N}_{s(x)}$ mit x vertauschbar ist, folgt der Satz in diesem Fall aus der Folgerung zu Hilfssatz 4.

Fall 2. Es gibt ein $\varepsilon_0>0$ mit $1_{\mathscr{M}}-e(\varepsilon_0)$ unendlich. Dann ist $\varepsilon_0\leqq 1$; wir wählen ein $z\in PZ\mathscr{M}$ mit $z(1_{\mathscr{M}}-e(\varepsilon_0))$ eigentlich unendlich. Mit

$$x_1:=z\int_{\varepsilon_0}^{1+}\lambda de(\lambda)\in\mathscr{M}^+$$

ist dann $x_1(x-x_1)=0$ und $s(x_1)=z(1_{\mathscr{M}}-e(\varepsilon_0))$, so daß es nach der eingangs gemachten Bemerkung genügt, den Satz für x_1 zu beweisen. Zu diesem Zweck setzen wir für $n\in\mathbb{Z}_+$, $0\leqq i\leqq 2^n$,

$$\lambda_i^n:=\varepsilon_0+\frac{i}{2^n}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right),$$

so daß $\lambda_0^n=\varepsilon_0$, $\lambda_{2^n}^n=1+\frac{\varepsilon_0}{2}>\varepsilon_0$ und $\lambda_i^n=\lambda_{2i}^{n+1}$. Wir konstruieren nun induktiv Familien zentraler Projektionen $(z_i^n)_{i=1}^{2^n}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, mit folgenden Eigenschaften:

a) $(z_i^n)_{i=1}^{2^n}\subset PZ\mathscr{M}$ ist eine orthogonale Familie

$$\text{mit }\sum_{i=1}^{2^n}z_i^n=z,\qquad n\in\mathbb{Z}_+\,.$$

b) Mit den Definitionen

$$u_n:=\sum_{i=1}^{2^n}\lambda_i^n z_i^n(e(\lambda_i^n)-e(\lambda_{i-1}^n))\,,\tag{8}$$

$$v_n:=\sum_{i=1}^{2^n}\lambda_i^n(z-z_i^n)(e(\lambda_i^n)-e(\lambda_{i-1}^n))\,,\tag{9}$$

$$p_n:=s(u_n)\,,\qquad q_n:=s(v_n)\,,\tag{10}$$

gilt $p_{n+1}\leqq p_n$ und $p_0\sim p_n\succ q_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Es ist klar, daß $u_nv_n=p_nq_n=0$ und $p_n+q_n=z(1_{\mathscr{M}}-e(\varepsilon_0))$, wenn die Konstruktion möglich ist. Für $n=0$ sei $z_1^0:=z$; dann ist $u_0=\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)z(1_{\mathscr{M}}-e(\varepsilon_0))$, $p_0=z(1_{\mathscr{M}}-e(\varepsilon_0))$, $v_0=q_0=0$ und natürlich $p_0\succ q_0$.

Sei nun die Konstruktion schon durchgeführt für $0\leqq n\leqq m$. Dann ist für $1\leqq i\leqq 2^m$

$$z_i^m(e(\lambda_i^m)-e(\lambda_{i-1}^m))=z_i^m(e(\lambda_{2i}^{m+1})-e(\lambda_{2i-1}^{m+1}))$$
$$+z_i^m(e(\lambda_{2i-1}^{m+1})-e(\lambda_{2i-2}^{m+1}))\,.$$

Nach Hilfssatz 1,2 gibt es nun zu jedem i ein $w_i\in PZ\mathscr{M}$, so daß gilt:

$$w_iz_i^m(e(\lambda_{2i}^{m+1})-e(\lambda_{2i-1}^{m+1}))\succ w_iz_i^m(e(\lambda_{2i-1}^{m+1})-e(\lambda_{2i-2}^{m+1}))\,,\tag{11}$$
$$(1_{\mathscr{M}}-w_i)z_i^m(e(\lambda_{2i-1}^{m+1})-e(\lambda_{2i-2}^{m+1}))\succ(1_{\mathscr{M}}-w_i)z_i^m(e(\lambda_{2i}^{m+1})-e(\lambda_{2i-1}^{m+1}))\,.$$

Dann setzen wir für $1 \leqq i \leqq 2^m$

$$z_{2i}^{m+1} := w_i z_i^m, \quad z_{2i-1}^{m+1} := (1_{\mathscr{M}} - w_i) z_i^m.$$

Es ist klar, daß Bedingung a) erfüllt ist. Weiter sieht man sofort, daß $p_{m+1} \leqq p_m$, und nach (11) ist $p_{m+1} \succ p_m - p_{m+1}$. Wäre p_{m+1} nicht eigentlich unendlich, so gäbe es $z' \in PZ\mathscr{M}$ mit $0 < z' \leqq c(p_{m+1})$ und $z' p_{m+1} \in P_f \mathscr{M}$, so daß $0 < z' p_m = z'(p_m - p_{m+1}) + z' p_{m+1} \in P_f \mathscr{M}$, was nicht sein kann. Mit Hilfssatz 1,6 haben wir dann

$$p_{m+1} \leqq p_m = (p_m - p_{m+1}) + p_{m+1} \prec p_{m+1}, \quad \text{d. h.} \quad p_{m+1} \sim p_m \sim p_0.$$

Schließlich ist wegen $p_{m+1} + q_{m+1} = p_0 q_{m+1} \geqq q_m$ und $q_{m+1} - q_m = p_m - p_{m+1}$, so daß wiederum nach Hilfssatz 1,6 folgt: $q_{m+1} = q_{m+1} - q_m + q_m = (p_m - p_{m+1}) + q_m \prec p_{m+1}$. Damit ist auch b) erfüllt und die Konstruktion beendet.

Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $z' \in PZ\mathscr{M}$ mit $0 < z' \leqq c(q_n)$, so daß $z' q_n \sim z' p_n \sim z' p_0$, so ist der Satz bewiesen. Wir können also annehmen, daß $q_n \in A_{p_0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $p := \inf\{p_n | n \in \mathbb{N}\}$; wir unterscheiden nochmals zwei Fälle.

Fall 2a. p ist eine endliche Projektion. Nach Hilfssatz 1,7 ist dann $p_0 - p \sim p_0$ und $q_n \in A_{p_0 - p}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit $r_n := q_n - q_{n-1} \in A_{p_0 - p}$ ist dann

$$p_0 - p = \sup_{n \in \mathbb{N}} (p_0 - p_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} q_n = \sum_{i=1}^{\infty} r_n.$$

$p_0 - p$ hat also die Eigenschaft (3), so daß auch in diesem Fall der Satz aus der Folgerung zu Hilfssatz 4 folgt, da $\mathscr{N}_{p_0 - p}$ sicher mit x_1 vertauschbar ist.

Fall 2b. p ist eine unendliche Projektion. Aus (8) folgt dann die Ungleichung

$$\varepsilon_0 p \leqq \varepsilon_0 p_{n+1} \leqq u_{n+1} \leqq u_n \leqq 2 \cdot 1_{\mathscr{M}}.$$

Nach [4], Lemma 1.7.4 und Lemma 1.7.1 existiert also $u : \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sigma\text{-}\lim_{n \to \infty} u_n$ und genügt der Ungleichung $\varepsilon_0 p \leqq u \leqq 2 \cdot 1_{\mathscr{M}}$. Da u und die u_n alle miteinander vertauschbar sind, ist weiter $(u_n - u)^* (u_n - u) \leqq u_1 (u_n - u)$ und damit ([4], Definition 1.8.6) $u = s\text{-}\lim_{n \to \infty} u_n$. Setzen wir nun

$$w_n := \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^n z_i^n = u_n + (w_n - u_n) =: u_n + y_n,$$

so sieht man genauso, daß $w := \inf_{n \in \mathbb{N}} w_n = s\text{-}\lim_{n \to \infty} w_n \in Z\mathscr{M}^+$ existiert, da ja $Z\mathscr{M}$ eine W^*-Unteralgebra von $\mathscr{M}$ ist. Damit existiert aber auch $y := s\text{-}\lim_{n \to \infty} y_n$; wegen $y_n \in \mathscr{M}^+$ ist $y \in \mathscr{M}^+$, und wegen $u_n y_n = 0$ ist nach [4], Proposition 1.8.12 $uy = s\text{-}\lim_{n \to \infty} u_n y_n = 0$. Aus (8) und (9) und [4], Theorem 1.11.3 folgt, daß $s\text{-}\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = x_1$; wie eben existiert also $v := s\text{-}\lim_{n \to \infty} v_n \in M^+$, und wir haben $uv = 0$. Wenn $s(u)$ unendlich ist, genügt es also wie vorher, den Satz für u zu beweisen. Wegen $u \geqq \varepsilon_0 p$ und $\varepsilon_0 > 0$ ist $(1_{\mathscr{M}} - s(u)) p (1_{\mathscr{M}} - s(u)) = 0$ und damit wegen $\|(1_{\mathscr{M}} - s(u)) p\|^2 = \|(1_{\mathscr{M}} - s(u)) p (1_{\mathscr{M}} - s(u))\| = 0$ also $p \leqq s(u)$ und damit $s(u)$ unendlich. Nach Hilfssatz 1,5 gibt es nun eigentlich unendliche, äquivalente und orthogonale Projektionen $p_1, p_2 \leqq s(u)$; damit folgt wegen $w \in Z\mathscr{M}$ und $p_1 y = p_2 y = 0$ für $i = 1,2$:

$$p_i u = p_i(u+y) = p_i w = w p_i = u p_i ,$$

womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

Literatur

1. Araki, H., Smith, M.-S. B., Smith, L.: On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors. Commun. math. Phys. **22**, 71—88 (1971)
2. Breuer, M.: On the homotopy type of the group of regular elements of semifinite von Neumann algebras. Math. Ann. **185**, 61—74 (1970)
3. Kuiper, N.: The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. Topology **3**, 19—30 (1965)
4. Sakai, S.: C^*-algebras and W^*-algebras. Berlin: Springer 1971

(Angenommen am 21. Juni 1975)