Math. Z. 158, 15–21 (1978)

Mathematische Zeitschrift

Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators

Jochen Brüning

Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität, Lahnberge,
D-3550 Marburg (Lahn), Bundesrepublik Deutschland

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß für Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators auf kompakten zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten die Länge der Knoten mindestens wie die Wurzel des Eigenwertes wächst. Damit wird das Ergebnis von [5] verallgemeinert. Herrn Dr. D. Gromes danke ich für zahlreiche anregende Diskussionen.

Es sei M eine zusammenhängende und kompakte zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Auf M betrachten wir den Laplace-Beltrami-Operator Δ, der in lokalen Koordinaten x_i mit dem metrischen Tensor (g_{ij}) und $(g^{ij}):=(g_{ij})^{-1}$ sowie $g:=\det(g_{ij})$, $1\leqq i,j\leqq 2$, die Form

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{1}$$

hat. $-\Delta$ ist ein positiver symmetrischer Operator in $L^2(M)$ mit Definitionsbereich $C^\infty(M)$. Die Friedrichsfortsetzung definiert eine positive selbstadjungierte Erweiterung D von $-\Delta$ in $L^2(M)$. Das Spektrum von D besteht aus einer abzählbar unendlichen Folge von Eigenwerten endlicher Vielfachheit ohne Häufungspunkte im Endlichen. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind nach bekannten Regularitätssätzen in $C^\infty(M)$, ([1], Satz 6.3). Wir zählen die Eigenwerte $0=\lambda_1<\lambda_2\leqq\cdots$ ihrer Vielfachheit nach und wählen eine in $L^2(M)$ orthonormierte und reellwertige Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zugehörigen Eigenfunktionen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen können auch durch das folgende Minimumproblem charakterisiert werden. Bezeichnet $H^1(M)$ den Raum der Funktionen in $L^2(M)$ mit quadratintegrierbaren ersten Ableitungen, so ist für $n\in\mathbb{N}$

$$\lambda_n=\min\Big\{\int_M|\operatorname{grad}\varphi|^2\,\Big|\,\varphi\in H^1(M)\text{ mit }\int_M|\varphi|^2=1$$
$$\text{und }\int_M\varphi\varphi_j=0\text{ für }1\leqq j\leqq n-1\Big\},$$

und die Eigenfunktionen zum Eigenwert λ_n sind genau die Funktionen in $H^1(M)$, die das Integral unter den angegebenen Nebenbedingungen minimieren.

Diese Aussagen gelten auch für das Dirichletproblem in Teilmengen von M, z.B. solchen mit stückweise differenzierbarem Rand. Unter den Knoten einer Eigenfunktion φ_n verstehen wir die Menge

$$K(\varphi_n) := \varphi_n^{-1}(0) \subset M,$$

und als Knotengebiete von φ_n bezeichnen wir die Zusammenhangskomponenten von $M - K(\varphi_n)$.

Bezeichnet nun $K(p)$ für $p \in M$ die Schnittkrümmung von M im Punkt p, so setzen wir

$$K := \max_{p \in M} |K(p)| + 1.$$

Es sei weiter π: $TM \to M$ das Tangentialbündel von M und für $r > 0$

$$B_r(M) := \{v \in TM \mid \|v\| < r\}.$$

Ist $q \in M$ und $\exp_q | B_r(M) \cap T_q M$ eine Einbettung, so nennen wir $k_r(q) := \exp_q(B_r(M) \cap T_q M)$ die geodätische Kugel um q vom Radius r. Es sei ρ_1 der Injektivitätsradius von M, und

$$\rho := \min\left\{\frac{\rho_1}{3}, \frac{\pi}{4\sqrt{K}}\right\}.$$

Wählen wir zu jedem $p \in M$ eine orthonormale Basis $\{e_1(p), e_2(p)\}$ von $T_p M$, so hat die Matrix

$$(g^{ij}(v)) := (g_{\exp_{\pi(v)}(v)}((d\exp_{\pi(v)})_v(e_i(\pi(v))), (d\exp_{\pi(v)})_v(e_j(\pi(v)))))^{-1}$$

für $v \in B_{2\rho}(M)$ positive Eigenwerte, die unabhängig von der Wahl der orthonormalen Basis und damit stetige Funktionen von v sind. Bezeichnen wir sie mit $\mu_1(v)$, $\mu_2(v)$, so gibt es also ein $C_1 > 0$ mit

$$\frac{1}{C_1} \leqq \mu_j(v) \leqq C_1 \tag{2}$$

für $v \in B_{2\rho}(M)$ und $j = 1, 2$. In der Terminologie von [4], Kap. I, C III ist schließlich die für $v \in B_{2\rho}(M)$ durch

$$\theta(v) := |\det((d\exp_{\pi(v)})_v)| = (\mu_1(v)\,\mu_2(v))^{-\frac{1}{2}}$$

definierte Funktion stetig und genügt der Ungleichung

$$\frac{1}{C_1} \leqq \theta(v) \leqq C_1. \tag{3}$$

Über die Struktur der Knoten einer Eigenfunktion gelten die folgenden bekannten Aussagen, die wir der Vollständigkeit halber kurz beweisen (s. [2] und [7]).

Satz 1. a) *Jeder Knotenpunkt p von φ_n besitzt eine Umgebung U in M derart, daß $U \cap K(\varphi_n)$ aus k eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M besteht, die nur den Punkt p gemeinsam haben, $k \in \mathbb{N}$. Sie lassen sich so anordnen, daß zwei benachbarte in p den Winkel π/k bilden.*

b) *Die Knoten von φ_n sind eine Vereinigung kompakter eindimensionaler Untermannigfaltigkeiten von M ohne Rand.*

Beweis. a) Es sei p ein Knotenpunkt von φ_n in M. Nach Einführung von Normalkoordinaten können wir annehmen, daß $p = 0 \in \mathbb{R}^2$ und daß φ_n in einer Umgebung V von 0 der Gleichung

$$\Delta\varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0 \tag{4}$$

mit $\lambda_n > 0$ genügt; dabei ist Δ durch (1) gegeben und die g^{ij} erfüllen zusätzlich die Gleichungen

$$g^{ij}(0) = \delta_{ij}, \ \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k}(0) = 0, \tag{5}$$

$1 \leqq i, j, k \leqq 2$. Dann ist $\varphi_n \in C^\infty(V)$; aus [3] folgt weiter, daß nicht alle Ableitungen von φ_n in 0 verschwinden können. Es sei also $k \in \mathbb{N}$ die niedrigste Ordnung einer nicht verschwindenden Ableitung. Für $k = 1$ ist die Aussage klar, so daß wir $k \geqq 2$ annehmen können. Aus (4) und (5) erhalten wir dann, daß

$$\frac{\partial^k \varphi_n}{\partial x_1^{k-l} \partial x_2^l}(0) = -\frac{\partial^k \varphi_n}{\partial x_1^{k-2-l} \partial x_2^{l+2}}(0)$$

für $0 \leqq l \leqq k-2$. Es ist nun nicht schwer zu sehen, daß es ein $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ und Funktionen $b_j \in C^\infty(V)$ gibt, $0 \leqq j \leqq k+1$, so daß in V

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \mathrm{Re}(z(x_1 + i x_2)^k) + \sum_{j=0}^{k+1} x_1^j x_2^{k+1-j} b_j(x_1, x_2). \tag{6}$$

Die Behauptungen folgen nun aus einer einfachen Anwendung des Satzes über implizite Funktionen und aus den Eigenschaften der Normalkoordinaten.

b) Der Beweis von a) zeigt, daß die Knoten von φ_n genau dann in keiner Umgebung eines Knotenpunktes p eine Mannigfaltigkeit bilden, wenn $\operatorname{grad}\varphi_n(p) = 0$. Aus (6) ergibt sich leicht, daß diese Knotenpunkte in M isoliert sind und deshalb wegen der Kompaktheit von M eine endliche Menge A bilden. $K(\varphi_n) - A$ besteht dann aus endlich vielen disjunkten eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten ohne Rand, die durch die Punkte von A eindeutig fortsetzbar sind. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Die im Satz erwähnten eindimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten nennen wir die Knotenlinien von φ_n. Die Knotengebiete werden also von Stücken von Knotenlinien begrenzt und haben stückweise differenzierbare Ränder. Weiter sieht man leicht, daß es nur endlich viele Knotengebiete gibt. Um die Situation in einer Dimension zu verallgemeinern, kann man nach der Anzahl $k(n)$ der Knotengebiete von φ_n fragen; hier gilt der bekannte Satz von Courant ([8], S. 393), daß $k(n) \leqq n$. Die Verschärfungen dieses Satzes durch Pleijel [11] und Peetre [10] zeigen aber, daß diese Verallgemeinerung unbefriedigend ist. Wir wollen stattdessen wie in [5] die Länge der Knotenlinien bez. der von M

induzierten Riemannschen Struktur untersuchen, was nach Satz 1 sinnvoll ist. Bezeichnen wir dazu die Länge von $K(\varphi_n)$ mit $L(\varphi_n)$, so erhalten wir das folgende Ergebnis.

Satz 2. *Es gibt ein $C>0$ und ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß für $n\geqq n_0$*

$$L(\varphi_n)\geqq C\sqrt{\lambda_n}.$$

Der Beweis von Satz 2 und eine explizite Form von C werden sich aus den folgenden Hilfssätzen ergeben. Wir beginnen mit einer Aussage über die Dichte von Knotenpunkten in M, die im Euklidischen Fall wohlbekannt ist ([8], S. 392). Dabei bezeichnet j_0 die kleinste positive Nullstelle der Besselfunktion J_0.

Hilfssatz 1. *Jede geodätische Kugel in M, deren Radius r die Ungleichung*

$$\frac{(2C_1^3 j_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_n}}=:\frac{C_2}{\sqrt{\lambda_n}}\leqq r\leqq 2\rho \tag{7}$$

erfüllt, enthält Knotenpunkte von φ_n.

Beweis. Es sei $p\in M$ und r eine Zahl, die (7) erfüllt; wir nehmen an, daß $k_r(p)$ keine Knotenpunkte von φ_n enthält. Dann gibt es ein Knotengebiet M_1 von φ_n mit $k_r(p)\subset M_1$. $\varphi_n|M_1$ ist dann die erste Eigenfunktion des Dirichletproblems für Δ in M_1 und λ_n der erste Eigenwert, da nach dem Satz von Courant die erste Eigenfunktion nicht in M_1 verschwindet, alle anderen aber aus Orthogonalitätsgründen Knotenpunkte in M_1 haben müssen. Ist andererseits ψ die erste Eigenfunktion des Dirichletproblems für Δ in $k_r(p)$ zum Eigenwert $\tilde\lambda$, so ist die Funktion

$$\psi_1(p):=\begin{cases}\psi(q),\, q\in k_r(p),\\ 0,\, q\in M_1-k_r(p),\end{cases}$$

sicher in $H^1(M_1)$ und deshalb $\lambda_n\leqq\tilde\lambda$ nach den Minimumseigenschaften der Eigenwerte.

Es sei nun weiter $\tilde\psi_2$ die erste Eigenfunktion des Dirichletproblems für den Laplace-Operator in $V:=B_r(M)\cap T_pM\subset\mathbb{R}^2$ zum Eigenwert j_0^2/r^2. Setzen wir noch $\psi_2:=\tilde\psi_2\circ(\exp_p|V)^{-1}$, so folgt aus den Minimumseigenschaften, aus [4], Kap. I, Beh. C III 2 und aus (2) und (3):

$$\begin{aligned}\tilde\lambda &\leqq \int_{k_r(p)}|\operatorname{grad}\psi_2|^2\Big(\int_{k_r(p)}|\psi_2|^2\Big)^{-1}\\ &=\int_V\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(v)\,\frac{\partial\tilde\psi_2}{\partial x_i}(v)\,\frac{\partial\tilde\psi_2}{\partial x_j}(v)\,\theta(v)\,dv\Big(\int_V|\tilde\psi_2|^2(v)\,\theta(v)\,dv\Big)^{-1}\leqq C_1^3\,\frac{j_0^2}{r^2}\leqq\frac{\lambda_n}{2}.\end{aligned}$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung.

Als nächstes benötigen wir eine Abschätzung für die Länge einer geschlossenen Kurve, die nur aus Stücken von Knotenlinien besteht.

Hilfssatz 2. *Es sei $c\subset K(\varphi_n)$ eine einfach geschlossene Kurve in M mit $L(c)<4\rho$. Dann ist*

$$L(c)\geqq\frac{2\pi j_0}{C_1^2}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Beweis. Wir wählen ein $p\in M$ mit $c\subset k_{2\rho}(p)$. Es sei $\tilde G$ das Innengebiet von $\exp_p^{-1}(c)$ und $G:=\exp_p(\tilde G)$. Wir setzen $\psi:=\varphi_n|G$. Bezeichnet $\tilde\lambda$ den ersten Eigenwert des Dirichletproblems für den Laplace-Operator in $\tilde G$, so erhalten wir mit $\tilde\psi:=\psi\circ(\exp_p|\tilde G)^{-1}$ und Behauptung C III 2 in [4], Kapitel 1:

$$\begin{aligned}\lambda_n &=\int_G|\operatorname{grad}\psi|^2\Big(\int_G|\psi|^2\Big)^{-1}\\ &=\int_{\tilde G}\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(v)\,\frac{\partial\tilde\psi}{\partial x_i}(v)\,\frac{\partial\tilde\psi}{\partial x_j}(v)\,\theta(v)\,dv\Big(\int_{\tilde G}|\tilde\psi|^2(v)\,\theta(v)\,dv\Big)^{-1}\geqq\frac{1}{C_1^3}\,\tilde\lambda.\end{aligned}$$

Kombinieren wir die Ungleichung von Faber und Krahn [9] mit der isoperimetrischen Ungleichung, so folgt weiter

$$\tilde\lambda\geqq\frac{4\pi^2 j_0^2}{L(\partial\tilde G)^2}.$$

Wenn wir jetzt noch beachten, daß $L(c)\geqq C_1^{-\frac{1}{2}}L(\partial\tilde G)$, so ergibt sich insgesamt

$$\lambda_n\geqq\frac{4\pi^2 j_0^2}{C_1^4 L(c)^2}$$

wie behauptet.

Schließlich brauchen wir die folgende Aussage über Kugelpackungen in M. Zur Abkürzung setzen wir

$$C_3:=\frac{2}{\pi\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\,\rho.$$

Hilfssatz 3. *Es sei $0<r\leqq\min\left\{\frac{\rho}{10},\frac{\pi C_3}{2}\right\}=:C_4$. Dann gibt es $p_i\in M$ so, daß die geodätischen Kugeln $k_{2r}(p_i)$ sich paarweise nicht schneiden, $1\leqq i\leqq N(r)$. Für $N(r)$ gilt dabei die Abschätzung*

$$N(r)\geqq\frac{C_3\pi\rho}{8}\,\frac{1}{r^2}. \tag{8}$$

Beweis. Es sei $p\in M$. In $T_pM=\mathbb{R}^2$ betrachten wir die konzentrischen Kreise $\tilde c_j$ um 0 vom Radius jr und setzen $c_j:=\exp_p(\tilde c_j)$, $j\in\mathbb{N}$. Ist $q\in c_j$, so ist für kleines j $k_{2r}(q)$ enthalten in dem von c_{j-1} und c_{j+1} begrenzten geodätischen Kreisring. Wenn wir also für $0\leqq j_1\leqq j\leqq j_2\leqq\frac{\rho}{r}-1$ auf c_{2j+1} $n(j)$ Punkte finden, deren Abstand paarweise $\geqq 2r$ ist, so erhalten wir $N(r)$ Kugeln der gewünschten Art mit

$$N(r)=\sum_{j=j_1}^{j_2}n(j).$$

Nach Konstruktion von ρ können wir nun den Vergleichssatz von Rauch anwenden ([6], Satz 1.30), d.h. $n(j)$ läßt sich nach unten abschätzen durch die entsprechende Zahl auf der zweidimensionalen Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Führen wir dort Polarkoordinaten ein durch

$$x=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=\frac{1}{\sqrt{K}}\cos\theta, 0<\theta<\pi, \quad 0<\varphi<2\pi,$$

so ist c_{2j+1} gegeben durch die Gleichung $\theta=\sqrt{K}(2j+1)r$. Eine elementäre Überlegung zeigt dann, daß für $q_1, q_2 \in c_{2j+1}$ der sphärische Abstand $d(q_1, q_2)$ der Ungleichung

$$d(q_1,q_2) \geqq \frac{2}{\pi\sqrt{K}} \sin\sqrt{K}(2j+1)r|\varphi(q_1)-\varphi(q_2)|$$

genügt. Wir bestimmen weiter j_1 bzw. $j_2 \in \mathbb{N}$ als die kleinste bzw. größte Zahl j mit $(2j+1)r \geqq \rho$ bzw. $(2j+2)r \leqq 2\rho$. Für $j_1 \leqq j \leqq j_2$ und $q_1, q_2 \in c_{2j+1}$ ist dann $d(q_1,q_2) \geqq C_3|\varphi(q_1)-\varphi(q_2)|$ und damit wegen $r \leqq \frac{C_3\pi}{2}$

$$n(j) \geqq \frac{C_3\pi}{2r}.$$

Wegen $r \leqq \frac{\rho}{10}$ ist ferner $j_2 - j_1 \geqq \frac{1}{4}\frac{\rho}{r}$ und somit

$$N(r) \geqq \frac{C_3\pi\rho}{8}\frac{1}{r^2},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Damit kommen wir zum

Beweis von Satz 2. Wegen $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so finden, daß für $n \geqq n_0$

$$\frac{C_2}{\sqrt{\lambda_n}} \leqq \min\left\{C_4, \frac{2\rho C_1^2 C_2}{\pi j_0}\right\}.$$

Setzen wir $r:=\frac{C_2}{\sqrt{\lambda_n}}$, so gibt es Punkte $p_i \in M$, $1 \leqq i \leqq N(r)$, derart, daß die geodätischen Kugeln $k_{2r}(p_i)$ in M enthalten sind und sich paarweise nicht schneiden, während $N(r)$ der Ungleichung (8) genügt. Nach Hilfssatz 1 enthält jede der Kugeln $k_r(p_i)$ einen Knotenpunkt q_i von φ_n, $1 \leqq i \leqq N(r)$. Es seien nun c_j die Knotenlinien von φ_n, $1 \leqq j \leqq m$. Jedem q_i ordnen wir eine Knotenlinie zu, die q_i enthält, so daß c_j s_j dieser Punkte zugeordnet erhält mit $0 \leqq s_j \leqq N(r)$ und $N(r) = \sum_{j=1}^{m} s_j$. Ist $s_j=1$, so wird wegen $4\rho \geqq \frac{2\pi j_0}{C_1^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ mit Hilfssatz 2

$$L(c_j) \geqq \frac{2\pi j_0}{C_1^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Ist $s_j > 1$, so ist nach Konstruktion

$$L(c_j) \geqq s_j 2 C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Damit ergibt sich insgesamt wegen (8)

$$L(\varphi_n) \geqq \sum_{s_j \geqq 1} L(c_j) \geqq N(r)\min\left\{2C_2, \frac{2\pi j_0}{C_1^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$$
$$\geqq \frac{C_3\pi\rho}{8C_2^2}\min\left\{2C_2, \frac{2\pi j_0}{C_1^2}\right\}\sqrt{\lambda_n},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Literatur

1. Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton: Van Nostrand 1965
2. Albert, J.H.: Nodal and critical sets for eigenfunctions of elliptic operators. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 28. Partial Differential Equations (Berkeley 1971) pp. 71–78. Providence: American Mathematical Society 1973
3. Aronszajn, N.: A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **36**, 235–249 (1957)
4. Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E.: Le spectre d'une variété Riemannienne. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971
5. Brüning, J., Gromes, D.: Über die Länge der Knotenlinien schwingender Membranen. Math. Z. **124**, 79–82 (1972)
6. Cheeger, J., Ebin, D.: Comparison theorems in Riemannian geometry. Amsterdam, Oxford: North-Holland 1975
7. Cheng, S.-Y.: Eigenfunctions and nodal sets. Commentarii math. Helvet. **51**, 43–55 (1976)
8. Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin: Springer 1930
9. Krahn, E.: Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. Math. Ann. **94**, 97–100 (1925)
10. Peetre, J.: A generalization of Courant's nodal domain theorem. Math. Scandinav. **5**, 15–20 (1957)
11. Pleijel, Å.: Remarks on Courant's nodal line theorem. Commun. pure appl. Math. **9**, 543–550 (1956)

Eingegangen am 4. Juni 1977