GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Représentations des groupes d'isométries dans les sous-espaces propres du laplacien.* Note (*) de **Jochen Brüning** et **Ernst Heintze**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Nous décidons si une représentation irréductible d'un groupe compact G d'isométries opérant sur une variété riemannienne compacte fait partie de la représentation canonique du groupe dans les sous-espaces propres du laplacien. De plus nous donnons une formule asymptotique pour les multiplicités.

For a compact Lie group G of isometries of a compact Riemannian manifold we determine, whether or not a given irreducible representation of G appears in the natural representation on the eigenspaces of the Laplacian. Moreover we give an asymptotic formula for the multiplicities.

1. Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n et soit G un groupe de Lie opérant (non nécessairement effectivement) sur M par isométries. Il est bien connu que les sous-espaces propres (complexes) E_λ associés aux valeurs propres $\lambda \geqq 0$ du laplacien Δ de M sont de dimension finie et que chaque E_λ est invariant sous les isométries, de sorte que nous avons pour chaque λ une représentation unitaire de G, à savoir la restriction à E_λ de la représentation canonique τ de G dans $L^2(M)$. Or étant donnée une représentation $\rho : G \to U(V)$ unitaire irréductible de degré $k = \dim V$, nous désignons par $\nu(\lambda)$ le nombre des composantes équivalentes à ρ de la représentation τ de G dans E_λ.

Soit M_0 la réunion des orbites principales de G dans M. Pour tout $p \in M_0$ nous dénotons par G_p l'orbite de p sous G et par G_p le stabilisateur de p. Nous posons

$$V_p^* := \{ v \in V^* \mid \rho(h)^* v = v \text{ pour tout } h \in G_p \}$$

et

$$l := \dim V_p^*.$$

Évidemment l est indépendent du choix de $p \in M_0$.

Théorème 1. — *Pour $t \to \infty$ on a la formule asymptotique*

$$N(t) := \sum_{\substack{\lambda \in \operatorname{Spec}(\Delta) \\ \lambda \leqq t}} \nu(\lambda) \sim \operatorname{vol} \frac{M_0}{G} \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} l\, t^{(m/2)},$$

m étant la dimension de M_0/G, ω_m le volume de la boule euclidienne unité de dimension n; M_0/G est muni d'une telle structure riemannienne que la projection $\pi : M_0 \to M_0/G$ soit une submersion riemannienne.

La représentation ρ apparaît donc dans les sous-espaces propres du laplacien si et seulement si $l \geqq 1$. Lorsque G n'opère pas transitivement (c'est-à-dire $m > 0$), ρ apparaît même une infinité de fois. Dans le cas des groupes finis, on a évidemment $l = k$, $m = n$, et l'estimation plus forte suivante :

Théorème 2. — *Si G est fini, alors pour $t \to \infty$:*

$$N(t) = \frac{\operatorname{vol} M_0}{\operatorname{ord} G} \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} k\, t^{(n/2)} + O(t^{(n-1)/2} \log t).$$

Pour $G = \{e\}$ les théorèmes 1 et 2 donnent des résultats classiques de H. Weyl [9] et de R. Courant [3]. Pour G fini et M étant une surface de Riemann compacte à courbure constante négative, le théorème 1 a été prouvé par H. Huber [5], dont le travail nous a stimulé pour cette recherche. Dans le cas d'une variété à bord M, on a les mêmes résultats pour des extensions autoadjointes appropriées de Δ dans $L^2(M)$ (par exemple pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann). De plus on peut étendre les résultats aux fibrés vectoriels, c'est-à-dire au cas où G opère par isométries sur un fibré C^∞ vectoriel hermitien, l'opération commutant avec un opérateur différentiel elliptique.

2. Dans le suivant nous donnons un aperçu de la démonstration. Les détails apparaîtront dans [2].

Soit $L^2(M\times V^*)=L^2(M)\otimes V^*$ l'espace hilbertien des sections L^2 du fibré trivial $M\times V^*\to M$. On a alors une représentation unitaire de G dans cet espace, définie par

$$\sigma(g):=\tau(g)\otimes\rho(g)^*,\qquad g\in G.$$

Soit $L^2(M, \rho)$ le sous-espace des sections G-invariantes. Les composantes d'un vecteur $u\in L^2(M, \rho)$ par rapport à une base de V^* engendrent un sous-espace de $L^2(M)$ invariant par τ dans lequel τ est équivalent à ρ. En posant $\Delta_V:=\Delta\otimes 1_{V^*}$ on obtient un opérateur autoadjoint positif dans $L^2(M)\otimes V^*$, pour lequel le sous-espace $L^2(M, \rho)$ est invariant. Alors $P:\Delta_V\,|\,L^2(M, \rho)$ est un opérateur autoadjoint positif dans $L^2(M, \rho)$. Comme dans [5], il en résulte que $\nu(\lambda)=\dim F_\lambda$, F_λ étant le sous-espace propre de P associé à λ, et par conséquent :

LEMME 1. — *La fonction comptante du spectre de* P *est* N.

Il est décisif de pouvoir identifier $L^2(M, \rho)$ avec un espace de sections. Pour ce faire nous posons pour $q\in M_0/G$:

$$h(q):=\operatorname{vol}\pi^{-1}(q)$$

et nous dénotons par $L^2(M_0/G, h)$ l'espace des fonctions de puissance deuxième intégrable par rapport à $h\,dv$, dv étant la mesure canonique de la variété riemannienne M_0/G.

LEMME 2. — *Il existe un ouvert* M_1 *contenu dans* M_0 *avec* $\operatorname{vol} M_1=\operatorname{vol} M_0$, *un point* $p\in M_1$ *et un isomorphisme isométrique*

$$\Phi:\ L^2(M, \rho)\to L^2\left(\frac{M_1}{G}, h\right)\otimes V_p^*.$$

Les ensembles respectifs des sections C^∞ *à support compact sont appliqués par* Φ *l'un dans l'autre.*

Avec $T:=\Phi\circ P\circ\Phi^{-1}$ on a un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(M_1/G, h)\otimes V_p^*$, avec la fonction comptante N. A l'aide d'un théorème de Peetre [8] on obtient la description explicite suivante de T.

LEMME 3. — T *est une extension autoadjointe d'un système h-symétrique elliptique d'ordre* 2 *sur* M_1/G. *Le symbol principal t est donné par*

$$t(\xi)=|\xi|^2\,\mathrm{id}_{V_p^*}\qquad \textit{pour}\quad \xi\, T^*\frac{M_1}{G}.$$

Afin de déterminer le comportement asymptotique de N, nous considérons le noyau Γ_s de l'opérateur e^{-sT}, $s>0$. Γ_s est une fonction $C^\infty: M_1/G\times M_1/G\to \operatorname{Hom}(V_p^*, V_p^*)$, reliée à N par

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dN(t)=\int_{M_1/G}\operatorname{tr}\Gamma_s(x, x)\,h(x)\,dv(x).$$

Grâce à une méthode développée par Hörmander [6] on trouve que

$$\operatorname{tr} \Gamma_s(x, x) \sim \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} l \frac{s^{-m/2}}{h(x)},$$

pour $x \in M_1/G$ et $s \searrow 0$. Le théorème 1 résulte aisément de cette relation, du lemme de Lebesgue-Fatou et d'un théorème taubérien pour la transformation de Laplace [4], si nous montrons seulement l'existence d'un $c_1>0$ tel que pour $0<s\leqq 1$ et pour $x\in M_1/G$:

$$(\star) \qquad \left|s^{m/2} \operatorname{tr} \Gamma_s(x, x)\right| \leqq \frac{c_1}{h(x)}.$$

Pour démontrer $(\star)$ nous établissons d'abord une relation entre Γ_s et le noyau Γ_s^0 de l'opérateur $e^{-s\Delta}$. Si μ désigne une mesure de Haar sur G nous trouvons l'inégalité

$$\sup_{x, y \in M_0/G} \left|\Gamma_s(x, y)\right| \leqq \frac{1}{\mu(G)^2} \sup_{p, q \in M} \int_G \int_G \left|\Gamma_s^0(g^{-1} p, hq)\right| d\mu(g)\, d\mu(h).$$

La démonstration s'achève par des estimations bien connues de Γ_s^0 et le lemme suivant :

LEMME 4. — *Il existe un nombre $c_2>0$ tel que pour tout $x\in M$:*

$$\frac{\operatorname{vol} Gx}{\mu(G)} \int_G e^{-d^2(x, gx)/t}\, d\mu(g) \leqq c_2\, t^{(1/2)\dim Gx},$$

d désignant la fonction distance sur M × M.

L'estimation plus forte de N dans le théorème 2 pour G fini est une conséquence de l'existence d'une triangulation G-équivariante différentiable de M [7], du principe du maximum-minimum et des résultats de [1].

Ce travail a été supporté par le Sonderforschungsbereich 40 «Theoretische Mathematik» de l'Université de Bonn.

(*) Séance du 6 mars 1978.

[1] J. BRUNING, *Math. Z.*, 137, 1974, p. 75-85.
[2] J. BRUNING et E. HEINTZE (à paraître).
[3] R. COURANT et D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik I*, Springer, Berlin, 1930.
[4] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation I*, Birkhäuser, Basel, 1950.
[5] H. HUBER, *Comm. Math. Helvetici*, 52, 1977, p. 177-184.
[6] L. HORMANDER, *Belfer Graduate School of Sciences* (*Proceedings*, 1966, p. 155-202).
[7] S. ILLMAN, *Math. Ann.* (à paraître).
[8] J. PEETRE, *Math. Scand.*, 8, 1960, p. 116-120.
[9] H. WEYL, *Math. Ann.*, 71, 1912, p. 441-479.

Sonderforschungsbereich 40, *Mathematisches Institut der Universität Bonn, Wegelerstr.* 10, 5300 *Bonn, Bundesrepublik Deutschland.*