Zur Eigenwertverteilung invarianter elliptischer Operatoren*)

Von *Jochen Brüning* in Duisburg

1. Einleitung

Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und Q ein elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung $m>0$ auf $C^\infty(M)$. Nehmen wir weiter an, daß Q positiv und symmetrisch ist in $L^2(M)$, so besitzt die eindeutig bestimmte selbstadjungierte Erweiterung von Q in $L^2(M)$ (die wir ebenfalls mit Q bezeichnen werden) ein reines Punktspektrum endlicher Vielfachheit. Bezeichnet Q_λ den Eigenraum von Q zum Eigenwert λ, so mißt die Funktion

$$N(t):=\sum_{\lambda\leq t}\dim Q_\lambda$$

die asymptotische Verteilung der Eigenwerte. Die Funktion N ist eingehend untersucht worden. Zur Formulierung der Ergebnisse benötigen wir die folgende Präzisierung: wir nehmen an, daß in jedem Koordinatensystem (x,ξ) das Symbol $\sigma_Q(x,\xi)$ von Q eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\sigma_Q(x,\xi)\sim\sum_{j\geq 0}q_{m-j}(x,\xi)$$

besitzt mit q_{m-j} homogen vom Grad $m-j$. Das invariant definierte Hauptsymbol q ist gleich q_m in den lokalen Koordinaten, das „subprincipal symbol" sub Q ist gleich

$$q_{m-1}(x,\xi)-\frac{1}{2i}\sum_j\frac{\partial^2 q_m}{\partial x_j\partial\xi_j}(x,\xi).$$

Wir setzen dann

$$B^*M:=\{(p,\xi)\in T^*M\mid q(p,\xi)\leq 1\}$$

und

$$S^*M:=\{(p,\xi)\in T^*M\mid q(p,\xi)=1\}.$$

*) Diese Arbeit wurde verfaßt mit Unterstützung des Sonderforschungsbereichs 40 „Theoretische Mathematik" an der Universität Bonn.

0075-4102/83/0339-0003$02.00

Hörmander [8] hat bewiesen, daß für $t\to\infty$

$$(1)\qquad N(t)=\frac{\operatorname{vol}B^*M}{(2\pi)^n}t^{\frac{n}{m}}+O(t^{\frac{n-1}{m}}),$$

und dieses Ergebnis ist bestmöglich. Duistermaat und Guillemin [5] haben die Methode von Hörmander erweitert und folgende Verschärfung von (1) bewiesen. Bezeichnet H_q das zu q gehörige Hamiltonvektorfeld auf T^*M und ist die Bedingung

(2) „die Menge $\{(p,\omega)\in S^*M\mid$ für ein $t\neq 0$ hat Φ^t Kontakt unendlicher Ordnung mit der Identität in $(p,\omega)\}$ hat das Maß 0 in S^*M"

erfüllt, so gilt die schärfere Abschätzung

$$(3)\qquad N(t)=\frac{\operatorname{vol}B^*M}{(2\pi)^n}t^{\frac{n}{m}}-\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{S^*M}\operatorname{sub}Q\,t^{\frac{n-1}{m}}+o(t^{\frac{n-1}{m}}).$$

In der vorliegenden Untersuchung betrachten wir den Fall, daß zusätzlich zu den beschriebenen Daten eine kompakte Liegruppe G auf M effektiv und isometrisch arbeitet. Dann haben wir eine zugehörige unitäre Darstellung V von G in $L^2(M)$, gegeben durch

$$V_gf(p):=f(g^{-1}(p)),\qquad g\in G,\quad p\in M,\quad f\in L^2(M).$$

Wir verlangen weiter, daß der Operator Q mit der Gruppenaktion vertauscht, d.h. für $g\in G$ gilt

$$V_gQ=QV_g.$$

Für eine irreduzible unitäre Darstellung κ von G sind dann die Zahlen

$$m_\kappa(\lambda):=\text{Vielfachheit von }\kappa\text{ in }V\mid Q_\lambda$$

und die entsprechende Anzahlfunktion

$$N_\kappa(t):=\sum_{\lambda\leq t}m_\kappa(\lambda)$$

wohldefiniert; für $G=\{e\}$ erhalten wir die eben besprochene Funktion N. Das asymptotische Verhalten von N_κ für Differentialoperatoren Q (allerdings auch für nichtskalare) wurde in [1] behandelt. Dort wurde auch eine Restgliedabschätzung für endliches G angegeben (Theorem 5.1), die schwächer ist als (1). Wir wollen dieses Ergebnis verbessern.

Satz 1. *Es sei G endlich. Dann gilt für jede irreduzible unitäre Darstellung κ von G*

$$N_\kappa(t)=\frac{\dim\kappa}{|G|}\frac{\operatorname{vol}B^*M}{(2\pi)^n}t^{\frac{n}{m}}+O(t^{\frac{n-1}{m}}).$$

Dabei bezeichnet $|G|$ die Anzahl der Elemente von G.

Das ist die Verallgemeinerung von (1). Wir beweisen weiter auch eine Verallgemeinerung von (3).

Satz 2. *Es sei G endlich und die Bedingung (2) erfüllt. Für jede irreduzible unitäre Darstellung κ von G gilt dann*

$$N_\kappa(t)=\frac{\dim\kappa}{|G|}\,\frac{\operatorname{vol} B^*M}{(2\pi)^n}\,t^{\frac{n}{m}}-\frac{\dim\kappa}{|G|(2\pi)^n}\int_{S^*M}\operatorname{sub} Q\, t^{\frac{n-1}{m}}$$
$$+\sum_{\substack{g\in G\\ N\subset M^g\\ \operatorname{codim} N=1}}\frac{\bar{\chi}_\kappa(g)}{|G|}\,\frac{\operatorname{vol} B^*N}{2(2\pi)^{n-1}}\,t^{\frac{n-1}{m}}+o(t^{\frac{n-1}{m}}).$$

Dabei bezeichnet χ_κ den Charakter von κ, und die Summation erstreckt sich über alle Komponenten der Codimension 1 in den Fixpunktmengen M^g, $g\in G$.

Die Sätze 1 und 2 können aufgefaßt werden als Aussagen über Randwertprobleme in Fundamentalbereichen der G-Aktion in M (s. [1], Abschnitt 5). Ist z.B. M die Verdoppelung einer berandeten Mannigfaltigkeit $\bar{M}$ mit einer unter der natürlichen Spiegelung σ invarianten Metrik, $G=\{e,\sigma\}$ und Q der Laplace-Operator $-\Delta$ auf M, bezeichnen wir weiter mit 1 und -1 die beiden irreduziblen unitären Darstellungen von $G\cong\mathbb{Z}_2$, so wird N_1 die Anzahlfunktion des Neumannproblems und N_{-1} die des Dirichletproblems für Δ in $\bar{M}$. Satz 1 liefert dann das Resultat von Seeley ([14], [15], s. auch [12]) in diesem Fall, und Satz 2 liefert — wenn die Zusatzbedingung erfüllt ist — die sogen. Weyl-Vermutung für $\bar{M}$; dies ist eng verwandt mit dem Ergebnis von Ivrii [10] (s. auch [11]). Die zitierten Arbeiten über Randwertprobleme behandeln alle den Laplaceoperator auf Mannigfaltigkeiten mit glattem oder nur schwach singulärem Rand, so daß Satz 1 und 2 nicht in diesen Ergebnissen enthalten sind.

Es ist eine natürliche Frage, ob Satz 1 ein Analogon für beliebige kompakte Gruppen besitzt. Die Asymptotik ohne Restgliedabschätzung wurde in [1] hergeleitet, und in Spezialfällen finden sich sehr gute Restgliedabschätzungen in [6]. Im allgemeinen stößt man aber auf das Problem, daß die kritische Menge der in Abschnitt 5 behandelten Phasenfunktion keine Mannigfaltigkeit mehr ist und daher die hier entwickelte Methode versagt.

Die Grundlage unseres Beweises bildet die in [8] und [5] entwickelte Methode der Wellengleichung, die wir auf den hier betrachteten Fall ausdehnen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit für den Fall des Laplace-Operators (in vorläufiger Form) wurden in [2] angekündigt. Herrn R. Seeley danke ich für einige sehr hilfreiche Diskussionen über Eigenwertprobleme.

2. Das Tauberargument

Wir nehmen jetzt an, daß Q die Ordnung 1 hat. Nach dem Spektralsatz und einem bekannten Resultat von Seeley [13] bedeutet dies keine Einschränkung der Allgemeinheit. Im folgenden bezeichnen C, C' etc. positive Konstanten, die unabhängig sind von den explizit aufgeführten Variablen, von Fall zu Fall aber verschieden sein können. Weiter schreiben wir $f(t)\sim g(t)$ für $t\to\infty$ (oder $t\to-\infty$), falls

$$|f(t)-g(t)|\leqq C_N(1+|t|)^{-N}$$

gilt für jedes $N\in\mathbb{N}$ und $t\to\infty$ (oder $t\to-\infty$).

Der Ausgangspunkt zum Beweis der Hauptresultate sind die folgenden Beobachtungen. Ist $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und gilt

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\rho}(x)\,dx=2\pi\rho(0), \tag{4}$$

so können wir schreiben

$$N_\kappa(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_\kappa(t-x)\,\hat{\rho}(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\big(N_\kappa(t)-N_\kappa(t-x)\big)\,\hat{\rho}(x)\,dx$$
$$=:H_\rho(t)+R_\rho(t)$$

und

$$\frac{dH_\rho}{dt}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t-x)\,N_\kappa(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\rho}(t-x)\,N_\kappa(x)\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\rho}(t-x)\,dN_\kappa(x)=\sum_\lambda m_\kappa(\lambda)\,\hat{\rho}(t-\lambda)=:K_\rho(t).$$

K_ρ erweist sich als die entscheidende Größe in dieser Untersuchung. Wir werden den folgenden Satz beweisen.

Satz 3. *Es sei G endlich. Es gibt ein $\delta>0$, so daß für*

$$\operatorname{supp}\rho\subseteqq(-\delta,\delta) \tag{5}$$

gilt:

$$K_\rho(t)=\frac{\dim\kappa}{|G|}\,\frac{\operatorname{vol} S^*M}{(2\pi)^n}\,t^{n-1}+O(t^{n-2}),\qquad 1\leqq t\to\infty,$$

und

$$K_\rho(t)\sim 0\quad \textit{für}\quad t\to-\infty.$$

Aus diesem Satz folgt Satz 1, wenn ρ geeignet gewählt wird, so daß das asymptotische Verhalten von N_κ zurückgeführt ist auf das von K_ρ.

Beweis von Satz 1. Wir wählen $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit (4), (5) und

$$\hat{\rho}(x)\geqq C>0,\qquad |x|\leqq 1. \tag{6}$$

Ein solches ρ ist leicht zu konstruieren (vgl. [7], S. 377): Wir wählen eine gerade Funktion $\rho_1\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_1(x)\,dx\neq 0$ und setzen $\rho_2:=\rho_1*\rho_1$. Für geeignete Zahlen $a,b>0$ hat dann $\rho(x):=a\rho_2(bx)$ die Eigenschaften (4), (5) und (6). Es folgt jetzt für $t\in\mathbb{R}$ die Abschätzung

$$N_\kappa(t+1)-N_\kappa(t)\leqq\sum_{|t-\lambda|\leqq 1}m_\kappa(\lambda)\leqq\frac{1}{C}\sum_\lambda\hat{\rho}(t-\lambda)\,m_\kappa(\lambda)$$
$$\leqq C'(1+|t|)^{n-1}.$$

Daraus folgt für $t,\ x \in \mathbb{R}$

$$|N_\kappa(t) - N_\kappa(t-x)| \leqq C(1+|t|)^{n-1}(1+|x|)^n$$

und damit für $t \geqq 1$

$$(7) \qquad |R_\rho(t)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |N_\kappa(t) - N_\kappa(t-x)|\,|\hat{\rho}(x)|\,dx$$

$$\leqq C(1+t)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)^n\,|\hat{\rho}(x)|\,dx \leqq C' t^{n-1}.$$

Für $t \leqq -1$ ist wegen Q positiv

$$H_\rho(t) = \int_0^\infty \hat{\rho}(t-x)\,N_\kappa(x)\,dx,$$

so daß folgt

$$\lim_{t \to -\infty} H_\rho(t) = 0.$$

Daher erhalten wir durch Integration für $1 \leqq t \to \infty$

$$H_\rho(t) = \int_{-\infty}^{t} K_\rho(x)\,dx = C + \int_1^t K_\rho(x)\,dx$$

$$= \frac{\dim \kappa}{|G|}\,\frac{\operatorname{vol} S^*M}{n(2\pi)^n}\,t^n + O(t^{n-1}) + C'$$

$$= \frac{\dim \kappa}{|G|}\,\frac{\operatorname{vol} B^*M}{(2\pi)^n}\,t^n + O(t^{n-1}),$$

womit der Beweis von Satz 1 beendet ist.

3. Eine Spurformel

Der Beweis von Satz 3 beruht auf der Tatsache, daß K_ρ sich darstellen läßt als Spur eines geeigneten mit Q verknüpften Operators. Zur Herleitung dieser Darstellung sei E_λ die orthogonale Projektion auf $\bigoplus_{x \leqq \lambda} Q_x$ in $L^2(M)$. E_λ ist ein Integraloperator mit C^∞-Kern e_λ; ist nämlich $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von $L^2(M)$ aus Eigenfunktionen von Q mit φ_i Eigenfunktion zum Eigenwert λ_i, so wird

$$e_\lambda(p, q) = \sum_{\lambda_i \leqq \lambda} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_i(q)}.$$

Es sei nun χ_κ der Charakter von κ und χ_λ der Charakter von $V\,|\,Q_\lambda$. Nach den Orthogonalitätsrelationen der Charaktere ([16], S. 189) erhalten wir

$$m_\kappa(\lambda) = \frac{1}{|G|} \int_G \bar{\chi}_\kappa(g)\,\chi_\lambda(g)\,dG(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\lambda_i = \lambda} \int_{G \times M} \bar{\chi}_\kappa(g)\,\varphi_i(g^{-1}(p))\,\overline{\varphi_i}(p)\,dM(p)\,dG(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \operatorname{Sp} \int_G \bar{\chi}_\kappa(g)\,V_g(E_\lambda - \lim_{\mu \to \lambda - 0} E_\mu)\,dG(g),$$

wobei dM bzw. dG das Riemannsche Maß von M bzw. von G bzgl. einer linksinvarianten Metrik bezeichnet. Man vermutet daher die Identität

$$(8) \qquad K_\rho(t) = \frac{1}{|G|} \operatorname{Sp} \int_G \bar{\chi}_\kappa(g)\,V_g \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}(t-x)\,dE_x\,dG(g),$$

die sich wie folgt herleiten läßt. Wegen

$$Q^m V_g \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}(t-x)\,dE_x = V_g \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \hat{\rho}(t-x)\,dE_x, \qquad m \in \mathbb{N},$$

und der Koerzivität von Q bildet der G-Integrand in (8) $L^2(M)$ in $C^\infty(M)$ ab und hat deshalb einen C^∞-Kern, nämlich

$$\bar{\chi}_\kappa(g) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}(t-x)\,de_x(g^{-1}(p), q), \qquad p, q \in M.$$

Also hat wegen der Kompaktheit von G auch der in (8) rechts stehende Operator C^∞-Kern, und für die Spur erhalten wir

$$\int_M \int_G \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\chi}_\kappa(g)\,\hat{\rho}(t-x)\,de_x(g^{-1}(p), p)\,dG(g)\,dM(p).$$

Da dieses Integral absolut konvergiert, folgt die Behauptung. Schließlich sieht man leicht ein, daß

$$V_g \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}(t-x)\,dE_x = V_g \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \rho(s)\,e^{isQ}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \rho(s)\,e^{isQ}\,V_g\,ds$$

als Gleichung zwischen Operatoren in $L^2(M)$. Wir erhalten damit die Spurformel

$$(9) \qquad K_\rho(t) = \frac{1}{|G|} \int_G \bar{\chi}_\kappa(g) \cdot \operatorname{Sp} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \rho(s)\,e^{isQ}\,V_g\,ds\,dG(g).$$

4. Der Kern von $e^{isQ} V_g$

Die weitere Auswertung von (9) stützt sich auf die Tatsache, daß für $u \in C^\infty(M)$

$$e^{isQ} u \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$$

die Lösung des folgenden Anfangswertproblems liefert:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial s} + Q\right) v = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times M, \quad v(0, p) = u(p), \qquad p \in M.$$

Nach dem Satz vom Kern hat e^{isQ} also einen Distributionskern $U(s, p, q)$ in $\mathbb{R} \times M \times M$. Hörmander [8] zeigte, daß U in lokalen Koordinaten und für kleines s durch gewisse oszillierende Integrale dargestellt werden kann. Die inzwischen wohlbekannte Globalisierung dieser Integrale [9], [4] liefert die Theorie der Fourier-Integraloperatoren. In dieser Sprache lautet das Ergebnis über die Struktur von U ([5], Theorem 1. 1): U ist ein Fourier-Integraloperator der Klasse $I^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R} \times M, M; C)$ mit der kanonischen Relation

$$\begin{aligned} C := \{((t, \tau), (p_1, \xi_1), (p_2, \xi_2)) \in T^*\mathbb{R} \times M \times M \setminus 0 \mid \tau = q(p_1, \xi_1), (p_1, \xi_1) \\ = \Phi^t(p_2, \xi_2)\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist q das Hauptsymbol von Q und $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ der Fluß des zu q gehörigen Hamiltonvektorfeldes H_q auf T^*M.

Dies bedeutet, daß für jede Koordinatenumgebung $X' \subset \mathbb{R} \times M \times M$ und jedes $v \in C_0^\infty(X')$ eine Darstellung

$$(10) \qquad U(v) = \sum_{j=1}^{N} \int_{X'} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\psi_j(s, p_1, p_2, \xi)} a_j(s, p_1, p_2, \xi)\, v(s, p_1, p_2)\, d\xi\, ds\, dM(p_1)\, dM(p_2)$$

existiert. Dabei ist $\psi_j \in C^\infty(X' \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ und homogen vom Grad 1 in ξ. Ferner ist ψ_j eine nicht entartete Phasenfunktion, d.h. längs

$$C_j := \{(s, p_1, p_2, \xi) \in X' \times \mathbb{R}^n \setminus 0 \mid d_\xi \psi_j(s, p_1, p_2, \xi) = 0\}$$

sind die Differentiale $d\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_k}\right)$, $1 \leqq k \leqq n$, linear unabhängig, so daß C_j eine Mannigfaltigkeit ist. Schließlich liefert die Abbildung

$$(11) \qquad \alpha : C_j \ni (s, p_1, p_2, \xi) \mapsto (d_s \psi_j, d_{p_1} \psi_j, -d_{p_2} \psi_j) \in T^* X'$$

einen Diffeomorphismus in C, d.h. C beschreibt die Singularitäten (genauer: die Wellenfront) von U, s. [9], Prop. 2. 5. 7. Weiter ist $a_j \in S^0(X' \times \mathbb{R}^n)$; dabei besagt $a_j \in S^m(X' \times \mathbb{R}^n)$ für $m \in \mathbb{R}$, daß $a_j \in C^\infty(X' \times \mathbb{R}^n)$ und daß für jeden Differentialoperator P in X', jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ und jede kompakte Teilmenge K von X' gilt

$$\sup_{\substack{(s, p_1, p_2) \in K \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |D_\xi^\alpha P a_j(s, p_1, p_2, \xi)| \leqq C_{K, P, \alpha}(1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

Die Integrale in (10) sind im allgemeinen nicht konvergent, wohl aber dann, wenn $a_j \in S^m(X' \times \mathbb{R}^n)$ für jedes $m \in \mathbb{R}$. In diesem Fall kann man durch partielle Integration eine Form erzielen, die es erlaubt, die Definition auf $S^m(X' \times \mathbb{R}^n)$ für beliebiges m auszudehnen (s. dazu [9], Lemma 1. 2. 1 und Corollary 1. 1. 12). Wir müssen noch anmerken, daß die Definition eines Fourier-Integraloperators noch nicht enthält, daß das ξ-Integral in (10) höchstens n-dimensional ist. Das folgt aber im vorliegenden Fall aus [9], Theorem 3. 1. 4 und der Überlegung S. 141/142.

Die Darstellung (10) läßt sich weiter präzisieren, wenn wir uns auf Koordinatenumgebungen der Form $X' = (-\delta, \delta) \times Y \times Y$ beschränken mit einem hinreichend kleinen $\delta > 0$ und einem Koordinatensystem (Y, κ) für M. Dann können wir eine von s unabhängige nicht entartete Phasenfunktion ψ^κ wie oben finden, so daß für die unter κ transformierte Funktion $\kappa_* \psi^\kappa$ gilt

$$(12) \qquad \kappa_* \psi^\kappa(x, y, \xi) = \langle x - y \mid \xi \rangle + O(|x - y|^2 |\xi|), \qquad x, y \in \kappa(Y), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ferner eine Amplitude $a^\kappa \in S^0(X' \times \mathbb{R}^n)$ und vom Grad $-j$ homogene Funktionen $a_{-j}^\kappa \in C^\infty(X' \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ mit

$$(13) \qquad a^\kappa \sim \sum_j a_{-j}^\kappa$$

(zur Bedeutung der Asymptotik s. [9] Prop. 1. 1. 9), so daß dann für $v \in C_0^\infty(X')$ die Darstellung

$$(14) \; U(v) = \int_{X'} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\psi^\kappa(p_1, p_2, \xi) + s q^\kappa(p_2, \xi))} a(s, p_1, p_2, \xi)\, v(s, p_1, p_2)\, d\xi\, ds\, dM(p_1)\, dM(p_2)$$

gilt, wobei $\kappa_* q^\kappa$ das Hauptsymbol von Q in den κ-Koordinaten ist. Dies ist das oben erwähnte Resultat von Hörmander ([8], Abschnitt 3).

Der Kalkül der Fourier-Integraloperatoren erlaubt es nun, analoge Darstellungen für die Distributionskerne der Operatoren $e^{isQ} V_g$ anzugeben, $g \in G$. Wegen $V_g f = (g^{-1})^* f$ für $f \in C^\infty(M)$ ist V_g ein Fourier-Integraloperator in der Klasse $I^0(M, M; C_g)$, wobei die kanonische Relation gegeben ist durch

$$\begin{aligned} C_g &= \{((p_1, \xi_1), (p_2, \xi_2)) \in T^* M \times M \setminus o \mid p_2 = g^{-1}(p_1), \xi_1 = {}^t dg^{-1}(p_1)(\xi_2)\} \\ &= \{((p_1, \xi_1), (p_2, \xi_2)) \in T^* M \times M \setminus o \mid (p_1, \xi_1) = g^*(p_2, \xi_2)\}, \end{aligned}$$

wenn wir mit $g \mapsto g^*$ die assoziierte Aktion von G auf $T^* M$ bezeichnen (s. dazu [4], S. 55 und die Definition 4. 2. 1). Nach [9], Theorem 4. 2. 2 — dessen Bedingungen im vorliegenden Fall leicht nachzuprüfen sind — wird dann $e^{isQ} V_g$ ein Fourier-Integraloperator der Klasse $I^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R} \times M, M; \tilde{C}_g)$, wobei

$$\begin{aligned} (15) \qquad \tilde{C}_g = C \circ C_g = \{((t, \tau), (p_1, \xi_1), (p_2, \xi_2)) \in T^*\mathbb{R} \times M \times M \setminus 0 \mid, \\ \tau = q(p_1, \xi_1); \quad \text{es gibt} \quad (p, \xi) \in T^* M \setminus 0 \quad \text{mit} \\ (p_1, \xi_1) = \Phi^t(p, \xi), (p, \xi) = g^*(p_2, \xi_2)\} \\ = \{((t, \tau), (p_1, \xi_1), (p_2, \xi_2)) \in T^*\mathbb{R} \times M \times M \setminus 0 \mid, \\ \tau = q(p_1, \xi_1), (p_1, \xi_1) = \Phi^t \circ g^*(p_2, \xi_2)\}. \end{aligned}$$

Setzen wir $\tilde{V}_g := (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times g^{-1})^* : C^\infty(\mathbb{R} \times M) \to C^\infty(\mathbb{R} \times M)$, so erhalten wir $\tilde{V}_g e^{isQ} = e^{isQ} V_g$ als Abbildungen von $C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ in sich. Aus der Berechnung der zu $\tilde{V}_g e^{isQ}$ gehörigen kanonischen Relation folgt dann

$$\Phi^t \circ g^* = g^* \circ \Phi^t, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad g \in G. \tag{16}$$

5. Der Beweis von Satz 3

Wir setzen von nun an voraus, daß G endlich ist. Wir wollen das Verhalten von K_ρ bestimmen für die im Beweis von Satz 1 konstruierte Funktion ρ. Es ist nach (9)

$$\begin{aligned} K_\rho(t) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\kappa(g) \operatorname{Sp} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \rho(s)\, e^{isQ} V_g\, ds \\ &=: \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\kappa(g)\, K_\rho^g(t). \end{aligned}$$

Da jedes $g \in G$ eine Isometrie ist, ist die Fixpunktmenge M^g von g Vereinigung von kompakten totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten von M, die paarweise disjunkt sind. Zu jedem $p \in M^g$ gibt es ein Koordinatensystem (X, κ) mit $p \in X$ und eine Umgebung $\tilde{X}$ von p mit $\tilde{X} \subset X$ und $g(\tilde{X}) \subset X$; zu $p \in M \setminus M^g$ gibt es eine Umgebung $Y \subset M \setminus M^g$ mit $Y \cap g(Y) = \emptyset$. Also gibt es eine Überdeckung $(\tilde{X}_j, Y_k)_{\substack{1 \leq j \leq K \\ 1 \leq k \leq L}}$ von M, so daß

$$\tilde{X}_j \subset X_j \quad \text{mit} \quad (X_j, \kappa_j) \quad \text{Koordinatensystem und} \quad M^g \subset \bigcup_{j=1}^{K} \tilde{X}_j, \quad g(Y_j) \cap Y_j = \emptyset.$$

Es sei dann $(f_j, h_k)_{\substack{1 \leq j \leq K \\ 1 \leq k \leq L}}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins. Wir wählen $\tilde{f}_j \in C_0^\infty(X_j)$ mit $\tilde{f}_j | \operatorname{supp} f_j = 1$ und $\tilde{h}_k \in C_0^\infty(Y_k)$ mit $\tilde{h}_k | \operatorname{supp} h_k = 1$, $1 \leq j \leq K$, $1 \leq k \leq L$. Für $f \in C(M)$ sei M_f der zugehörige Multiplikationsoperator in $L^2(M)$. Es folgt

$$\begin{aligned} K_\rho^g(t) &= \sum_{j=1}^{K} \operatorname{Sp} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \rho(s)\, M_{\tilde{f}_j} e^{isQ} V_g M_{f_j}\, ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{L} \operatorname{Sp} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \rho(s)\, M_{\tilde{h}_k} e^{isQ} V_g M_{h_k}\, ds \\ &=: \sum_{j=1}^{K} I_j^g(t) + \tilde{I}(t). \end{aligned}$$

Nach [9], Prop. 1. 2. 3 sowie (11) und (15) haben die Operatoren $M_{\tilde{h}_k} e^{isQ} V_g M_{h_k}$ C^∞-Kern, $1 \leq k \leq L$, wenn nur δ hinreichend klein ist. Also ist $\tilde{I}(t) \sim 0$ für $|t| \to \infty$. Bei der Behandlung der übrigen Terme können wir annehmen, daß in $(-\delta, \delta) \times X_j \times X_j$ die Darstellung (14) für U gültig ist. Im Hinblick auf [9], Cor. 1. 1. 12 argumentieren wir zunächst so, als ob alle vorkommenden Amplituden in $S^m((-\delta, \delta) \times \tilde{X}_j \times \tilde{X}_j \times \mathbb{R}^n)$ wären für jedes $m \in \mathbb{R}$. Es folgte dann aus (14) eine absolut konvergente Integraldarstellung für U, so daß mit

$$R_j(\lambda, p, \xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\lambda} \rho(s)\, a_j(s, g^{-1}(p), p, \xi)\, ds$$

folgt

$$I_j^g(t) = \int_{X_j \times \mathbb{R}^n} e^{i\psi_j(g^{-1}(p), p, \xi)} \tilde{f}_j(g^{-1}(p))\, f_j(p)\, R_j(t - q_j(p, \xi), p, \xi)\, d\xi\, dM(p), \tag{17}$$

wobei $\psi_j := \psi^{\kappa_j}$ etc. geschrieben wurde. Für $a_j \in S^m$ gilt aber offenbar die Abschätzung

$$|\lambda|^N\, |R_j(\lambda, p, \xi)| \leq C_{N,m}(1 + |\xi|)^m, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad p \in X_j, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$, so daß wegen $q_j(p, \xi) \geq C|\xi|$ die Formel (17) auch in unserem Fall gültig ist. Ist $k \in C_0^\infty\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$ mit $k = 1$ in einer Umgebung von 1, so liefert (18) außerdem mit der Abkürzung

$$b_j(p, \eta) := k(q_j(p, \eta))\, \tilde{f}_j(g^{-1}(p))\, f_j(p), \qquad p \in X_j, \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} I_j^g(t) &\sim \int_{X_j \times \mathbb{R}^n} e^{i\psi_j(g^{-1}(p), p, \xi)} b_j\left(p, \frac{\xi}{t}\right) R_j(t - q_j(p, \xi), p, \xi)\, d\xi\, dM(p) \\ &=: \bar{I}_j^g(t) \end{aligned} \tag{19}$$

für $|t| \to \infty$. Im rechtsstehenden Integral substituieren wir $\xi = t\eta$ und $r := q_j(p, \omega)$, $\eta := r\omega$. Wir erhalten dann das Integral

$$\begin{aligned} \bar{I}_j^g(t) = t^n \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-its(1-r)} \rho(s)\, k(r)\, r^{n-1} \int_{X_j} \int_{q_j(p, \omega) = 1} & e^{itr\psi_j(g^{-1}(p), p, \omega)} \\ & \cdot \tilde{f}_j(g^{-1}(p))\, f_j(p)\, a_j(s, g^{-1}(p), p, tr\omega)\, d\omega\, dM(p)\, ds\, dr, \end{aligned}$$

wobei $d\omega$ der Quotient des Lebesguemaßes in $\mathbb{R}^n$ nach dem Lebesguemaß in $\mathbb{R}$ unter q_j ist (s. [4], S. 127). Es sei nun S^*X die in der Einleitung definierte Menge und dS^*X der Quotient des invarianten Maßes von T^*X nach dem Lebesguemaß in $\mathbb{R}$ unter q. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} &\eta(p, \omega) := {}^t d\kappa_j(p)\, \omega, \qquad \omega(p, \eta) := ({}^t d\kappa_j(p))^{-1} \eta, \\ &(\kappa_j^{-1})^*\, dM(x) =: \alpha_j(x)\, dx, \\ &\varphi_j(p_1, p_2, \eta) := \psi_j(p_1, p_2, \omega(p_2, \eta)), \\ &\tilde{a}_j(s, p_1, p_2, \eta) := \alpha_j \circ \kappa_j(p_2)\, a_j(s, p_1, p_2, \omega(p_2, \eta)), \\ &c_j^g(s, p, \eta) := \tilde{f}_j(g^{-1}(p))\, f_j(p)\, \tilde{a}_j(s, p_1, p_2, \eta) \end{aligned}$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \bar{I}_j^g(t) = t^n \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-its(1-r)} \rho(s)\, k(r)\, r^{n-1} \int_{S^*X_j} & e^{itr\varphi_j(g^{-1}(p), p, \eta)} \\ & \cdot c_j^g(s, p, tr\eta)\, dS^*X_j(p, \eta)\, dr\, ds. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Integrale mit der Methode der stationären Phase abschätzen. Dazu sei $p_1 \in X_j \cap M^g$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß die geodätische Kugel $B_\varepsilon(p_1)$ um p_1 vom Radius ε in X_j enthalten ist. Bezeichnen wir mit (x, ξ) die Koordinaten für $T^*B_\varepsilon(p_1)$, die zu einem Normalkoordinatensystem x gehören, so erhalten wir nach (11) für die transformierte Funktion $\tilde{\varphi}_j$

$$\tilde{\varphi}_j(x, y, \xi) = \langle x - y \,|\, \xi \rangle + O(|x - y|^2\, |\xi|).$$

Nach der Taylorformel gibt es eine für $|x|<\varepsilon$, $|y|<\varepsilon$, $|\zeta|>0$ definierte differenzierbare Abbildung $\xi=\xi(x,y,\zeta)$, die für festes x und y ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n\setminus 0\to\mathbb{R}^n\setminus 0$ ist, mit den Eigenschaften

$$\xi(x,x,\zeta)=\zeta,\ \xi(x,y,\lambda\zeta)=\lambda\xi(x,y,\zeta) \quad \text{für} \quad \lambda>0$$

und

$$\tilde{\varphi}_j(x,y,\xi(x,y,\zeta))=\langle x-y\,|\,\zeta\rangle,$$

wenn nur ε hinreichend klein ist. Durch die (x,ζ)-Koordinaten wird S^*X_j abgebildet auf die Menge

$$\{(x,\zeta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid |x|<\varepsilon,\ q(x,\xi(dg^{-1}(p_1)(x),x,\zeta))=1\},$$

wobei q wieder das Hauptsymbol von Q in den (x,ξ)-Koordinaten bezeichnet. Offenbar wird die Phasenfunktion transformiert in die Funktion $\langle dg^{-1}(p_1)(x)-x\,|\,\zeta\rangle$. Wir schreiben $x=(x_1,x_2)$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$ entsprechend der Zerlegung $T_{p_1}M=N_{p_1}M^g\oplus T_{p_1}M^g$. Dann sind die kritischen Punkte der Phasenfunktion gegeben durch die Gleichungen $x_1=\zeta_1=0$, d.h. $\psi_j(p,\eta):=\varphi_j(g^{-1}(p),p,\eta)$ hat die kritische Menge $S^*X_j\cap M^g$. Weiter berechnet man leicht, daß für $(p,\eta)\in S^*X_j\cap M^g$

$$\det(\operatorname{Hess}\psi_j\,|\,N_{(p,\eta)}S^*\tilde{X}_j\cap M^g)=-\det(1-dg(p))^2$$

und daß die Signatur der Hesseform auf dem Normalraum 0 ist.

Die Methode der stationären Phase angewendet auf das r-s-Integral liefert nun für $t\geqq 1$ wegen $\rho'(0)=0$

$$\begin{aligned}(20)\qquad \bar{I}_j^g(t)={}&t^{n-1}2\pi\rho(0)\int_{S^*X_j} e^{it\varphi_j(g^{-1}(p),p,\eta)}c_j^g(0,p,t\eta)\,dS^*X_j(p,\eta)\\ &-it^{n-2}2\pi\rho(0)\int_{S^*\tilde{X}_j} e^{it\varphi_j(g^{-1}(p),p,\eta)}\left[\left\{(n-1)\frac{\partial c_j^g}{\partial s}+\frac{\partial^2 c_j^g}{\partial r\,\partial s}\right\}(0,p,t\eta)\right.\\ &\left.+itc_j^g(0,p,t\eta)\,\varphi_j(g^{-1}(p),p,\eta)\right]dS^*X_j(p,\eta)+O(t^{n-3}).\end{aligned}$$

Zur weiteren Berechnung der Integrale dürfen wir a_j ersetzen durch die asymptotische Reihe (13). Wie in [5], S. 47/48 ergibt sich dann

$$\alpha_j\circ\kappa_j(p)\,a_{j0}(0,p,p,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^n},\ \alpha_j\circ\kappa_j(p)\,a_{j,-l}(0,p,p,\eta)=0,\quad l\geqq 1,$$

$$i\alpha_j\circ\kappa_j(p)\frac{\partial}{\partial s}a_{j0}(0,p,p,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^n}\operatorname{sub}Q(p,\eta)$$

mit sub Q wie in der Einleitung. Also folgt für $g=e$:

$$\begin{aligned}\bar{I}_j^e(t)={}&\frac{t^{n-1}}{(2\pi)^n}\int_{S^*M}f_j(p)\,dS^*M(p,\eta)\\ &+t^{n-2}\frac{(1-n)}{(2\pi)^n}\int_{S^*M}f_j(p)\operatorname{sub}Q(p,\eta)\,dS^*M(p,\eta)+O(t^{n-3}).\end{aligned}$$

Ist aber $g\neq e$, so ist $k_j:=\operatorname{codim}M^g\cap X_j\geqq 1$. Wir wenden nun auf die Integrale in (20) die verallgemeinerte Methode der stationären Phase an ([4], Abschnitt 1. 2) und erhalten

$$\bar{I}_j^g(t)=\frac{t^{n-k_j-1}}{(2\pi)^{n-k_j}}\int_{S^*X_j\cap M^g}|\det(dg(p)-1)|^{-1}f_j(p)\,dS^*X_j\cap M^g(p,\eta)+O(t^{n-k_j-2}).$$

Für $g\neq e$ seien N_i^g die Komponenten von M^g mit den Codimensionen $K_{g,i}$, $1\leqq i\leqq L_g$. Wir erhalten also für $t\geqq 1$

$$\begin{aligned}K_\rho(t)={}&\frac{\dim\kappa}{|G|}\frac{\operatorname{vol}S^*M}{(2\pi)^n}t^{n-1}+\frac{\dim\kappa}{|G|}\frac{(1-n)}{(2\pi)^n}\int_{S^*M}\operatorname{sub}Q\,t^{n-2}\\ &+\sum_{g\neq e}\frac{\tilde{\chi}_\kappa(g)}{|G|}\sum_{i=1}^{L_g}\frac{t^{n-K_{g,i}-1}}{(2\pi)^{n-K_{g,i}}}\int_{S^*N_i^g}|\det(dg-1)|^{-1}+O(t^{n-3}).\end{aligned}$$

Ist $K_{g,i}=1$ für ein g und ein i, so ist dg auf $N_pN_i^g$ Multiplikation mit -1. Also folgt

$$\begin{aligned}(21)\quad K_\rho(t)={}&\frac{\dim\kappa}{|G|}\frac{\operatorname{vol}S^*M}{(2\pi)^n}t^{n-1}+\frac{\dim\kappa}{|G|}\frac{(1-n)}{(2\pi)^n}\int_{S^*M}\operatorname{sub}Q\,t^{n-2}\\ &+\sum_{g\neq e}\frac{\tilde{\chi}_\kappa(g)}{|G|}\sum_{K_{g,i}=1}\frac{\operatorname{vol}S^*N_i^g}{2(2\pi)^{n-1}}t^{n-2}+O(t^{n-3}).\end{aligned}$$

Aus (17) und (18) sieht man sofort, daß $K_\rho(t)\sim 0$ für $t\to\infty$, womit der Beweis von Satz 3 beendet ist. Wir bemerken abschließend, daß wir tatsächlich etwas mehr bewiesen haben, nämlich daß K_ρ eine asymptotische Entwicklung nach Potenzen von t besitzt für $t\to\infty$. Mit der in [5], Abschnitt 2 verwendeten Schlußweise läßt sich daraus ein bekanntes Ergebnis von Donnelly herleiten ([3], Theorem 4. 1).

6. Der Beweis von Satz 2

Das Ergebnis von Satz 1 ist bestmöglich; man sieht das sofort am Beispiel der Sphäre S^2 mit der durch Spiegelung an einem Äquator gegebenen $\mathbb{Z}_2$-Aktion. In Analogie zu [5] und [10] wird man eine Verbesserung nur unter gewissen Bedingungen an den H_q-Fluß erwarten. Es zeigt sich, daß die von Duistermaat und Guillemin angegebene Bedingung (2) auch in dem Fall einer endlichen Gruppenaktion eine Verschärfung ermöglicht. Der Grund dafür ist die folgende Aussage.

Hilfssatz. *Unter der Bedingung* (2) *gilt*

$$K_\rho(t)=o(t^{n-1})$$

für jedes $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *mit* $0\notin\operatorname{supp}\rho$.

Aus diesem Hilfssatz und (21) ergibt sich Satz 2.

Beweis von Satz 2. Um (21) ausnutzen zu können, müssen wir die Abschätzung des Resttermes R_ρ in (7) verbessern. Dazu sei $0<\varepsilon<1$ und $\rho_\varepsilon(x):=\rho(\varepsilon x)$, so daß

$$\hat{\rho}_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\hat{\rho}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Wir wählen ρ wieder wie im Beweis von Satz 1; dann gilt

$$2\pi\rho_\varepsilon(0)=1, \quad \rho_\varepsilon'(0)=0$$

und

$$\hat{\rho}_\varepsilon(x)\geqq\frac{c}{\varepsilon} \quad \text{für} \quad |x|\leqq\varepsilon,$$

aber $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon\subset\left(-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$. Es sei δ wie in Satz 1 und $\tilde{\rho}\in C_0^\infty((-\delta,\delta))$ mit $\tilde{\rho}=1$ in einer Umgebung von 0. Aus dem Hilfssatz und aus (21) (mit ρ ersetzt durch $\tilde{\rho}\rho_\varepsilon$) ergibt sich, daß

$$K_{\rho_\varepsilon}(t)=K_{\rho_\varepsilon\tilde{\rho}}(t)+K_{\rho_\varepsilon(1-\tilde{\rho})}(t)\leqq C t^{n-1}$$

für $t\geqq t_\varepsilon\geqq 1$; also folgt wie im Beweis von Satz 1

$$N_\kappa(t+\varepsilon)-N_\kappa(t)\leqq C\varepsilon t^{n-1}$$

und

$$|N_\kappa(t)-N_\kappa(t-x)|\leqq C\varepsilon(1+t)^{n-1}\left(1+\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^n$$

für t, $t-x\geqq t_\varepsilon$. Damit finden wir für $t\geqq\tilde{t}_\varepsilon\geqq t_\varepsilon$

$$\begin{aligned}|R_{\rho_\varepsilon}(t)|&\leqq\left(\int_{-\infty}^{t-t_\varepsilon}+\int_{t-t_\varepsilon}^{\infty}\right)|N_\kappa(t)-N_\kappa(t-x)|\,|\hat{\rho}_\varepsilon(x)|\,dx\\ &\leqq C\varepsilon(1+t)^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^n\left|\hat{\rho}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\frac{dx}{\varepsilon}+C_\varepsilon(1+t)^{n-2}\leqq C\varepsilon t^{n-1}.\end{aligned}$$

Benutzen wir nochmals (21) mit $\tilde{\rho}\rho_\varepsilon$ anstelle von ρ, so folgt

$$\begin{aligned}H_{\rho_\varepsilon}(t)=&\frac{\dim\kappa}{|G|}\,\frac{\operatorname{vol}B^*M}{(2\pi)^n}\,t^n-\frac{\dim\kappa}{|G|(2\pi)^n}\int_{S^*M}\operatorname{sub}Q\,t^{n-1}\\ &+\sum_{g\neq e}\frac{\bar{\chi}_\kappa(g)}{|G|}\sum_{K_{g,i}=1}\frac{\operatorname{vol}S^*N_i^g}{2^n\pi^{n-1}(n-1)}\,t^{n-1}+O_\varepsilon(t^{n-2})+\int_{-\infty}^{t}K_{\rho_\varepsilon(1-\tilde{\rho})}(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Weiter ist mit $\zeta_\varepsilon(s):=\frac{i}{s}\rho_\varepsilon(s)\,(1-\tilde{\rho})\,(s)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t}K_{\rho_\varepsilon(1-\tilde{\rho})}(\tau)\,d\tau&=\lim_{T\to-\infty}\int_{T}^{t}\int_{-\infty}^{-\infty}\widehat{\rho_\varepsilon(1-\tilde{\rho})}\,(\tau-x)\,dN_\kappa(x)\,d\tau\\ &=\lim_{T\to-\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\hat{\zeta}_\varepsilon(t-x)-\hat{\zeta}_\varepsilon(T-x)]\,dN_\kappa(x)=K_{\zeta_\varepsilon}(t).\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Hilfssatz.

Nach der Diskussion in Abschnitt 4 und der Spurformel (9) können wir uns zum Beweis des Hilfssatzes beschränken auf die Abschätzung von Integralen der Form

$$J(t;\zeta a):=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{T^*X}e^{-ist}\zeta(s)\,e^{i\psi(s,p,p,\bar{\xi})}\,a(s,p,\bar{\xi})\,dT^*X(p,\bar{\xi})\,ds$$

mit den folgenden Bedingungen: $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus 0)$, $a\in S^0(\mathbb{R}\times T^*X)$ und hat in X kompakten Träger, X Koordinatenumgebung in M, und ψ ist eine nichtentartete Phasenfunktion zu der kanonischen Relation $\tilde{C}_g$ (beschrieben in (15)), insbesondere homogen vom Grad 1 bzgl. $\bar{\xi}$. Daß wir über T^*X integrieren können, also höchstens n Frequenzvariablen benötigen, folgt wiederum aus [9], Theorem 3. 1. 4 und der Diskussion auf S. 141/142. Da die Integrale auch nicht konvergieren, nehmen wir wieder $a\in S^m(\mathbb{R}\times T^*X)$ an für jedes $m\in\mathbb{R}$ und verwenden nachträglich [9], Corollary 1. 1. 12. Wir substituieren für $t\geqq 1$ $\bar{\xi}=t\xi$ und erhalten

$$J(t;\zeta a)=t^n\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{T^*X}e^{it(\psi(s,p,p,\xi)-s)}\zeta(s)\,a(s,p,t\xi)\,dT^*(p,\xi)\,ds.$$

Die kritischen Punkte der Phasenfunktion genügen den Gleichungen

(22) $\quad d_s\psi(s,p,p,\xi)=1,$

(23) $\quad d_\xi\psi(s,p,p,\xi)=0,$

(24) $\quad d_{p_1}\psi(s,p,p,\xi)+d_{p_2}\psi(s,p,p,\xi)=0.$

Nach (22) gibt es Konstanten C_1, $C_2>0$, so daß $C_1\leqq q(p,\xi)\leqq C_2$ gilt für

$$(s,p,\xi)\in\operatorname{supp}\zeta a \quad \text{und} \quad d_s\psi(s,p,p,\xi)=1.$$

Nach (11), (22) und (15) ergibt sich aus (23) und (24), daß mit $(p,\eta):=d_{p_1}\psi(s,p,p,\xi)$ für (s,p,ξ) kritisch gilt

(25) $\quad q(p,\eta)=d_s\psi(s,p,p,\xi)=1,$

(26) $\quad (p,\eta)=\Phi^s\circ g^*(p,\eta)=g^*\circ\Phi^s(p,\eta).$

Wir wählen jetzt $\chi_1\in C_0^\infty((0,\infty))$ mit $\chi_1\,|\,[C_1,C_2]=1$ und schreiben $1-\chi_1=:\chi_2+\chi_3$ mit $\operatorname{supp}\chi_2\subset[0,C_1]$, $\operatorname{supp}\chi_3\subset[C_2,\infty)$. Weiter sei $\bar{\chi}_i:=\chi_i\circ q$, $1\leqq i\leqq 3$. Dann wird

$$J(t;\zeta a)=\sum_{i=1}^{3}J(t;\zeta a\bar{\chi}_i).$$

Durch partielle Integration im s-Integral folgt sofort $J(t;\zeta a\bar{\chi}_2)\sim 0$. Im dritten Integral erzielen wir zunächst eine für $a\in S^0(\mathbb{R}\times T^*X)$ gültige Darstellung durch partielle Integration wie in [9], Lemma 1. 2. 1. Dann folgt $J(t;\zeta a\bar{\chi}_3)\sim 0$ wie vorher. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}J(t;\zeta a)&\sim J(t;\zeta a\bar{\chi}_1)\\ &=t^n\int_{S^*X}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(r\psi(s,p,p,\omega)-s)}\zeta(s)\,\chi_1(r)\,a(s,p,tr\omega)\,r^{n-1}\,ds\,dr\,dS^*X(p,\omega).\end{aligned}$$

Mittels einer Zerlegung der Eins dürfen wir jetzt annehmen, daß der Träger des Integranden im (s,p,ω)-Integral enthalten ist in einer Umgebung $(s_0-\delta,s_0+\delta)\times Y$ eines Punktes (s_0,p_0,ω_0) mit $\delta<|s_0|$, daß $\psi(s_0,p_0,p_0,\omega_0)=0$ und $d_s\psi(s,p,\omega)\neq 0$ für

$|s-s_0|<\delta$, $(p,\omega)\in Y$ und daß die Nullstellen von ψ in $(s_0-\delta, s_0+\delta)\times Y$ gegeben sind durch eine C^∞-Funktion $s: Y\to(s_0-\delta, s_0+\delta)$. Dann können wir die Methode der stationären Phase auf das (r,s)-Integral anwenden; mit einer Funktion $b\in C_0^\infty(Y)$ folgt dann

$$J(t;\zeta a)=t^{n-1}\int_{S^*Y} e^{-its(p,\omega)}b(p,\omega)\,dS^*X(p,\omega)+O(t^{n-2})$$

für $1\to\infty$. Wenn nun in keinem Punkt von Y alle Ableitungen der Ordnung $\geqq 1$ von s verschwinden, so zeigen elementare Abschätzungen, daß $J(t;\zeta a)=o(t^{n-1})$. Wenn aber in $(\bar p,\bar\omega)\in Y$ alle Ableitungen verschwinden, so verschwindet $\psi(\bar s,p,p,\omega)$ von unendlicher Ordnung in $(\bar p,\bar\omega)$, $\bar s:=s(\bar p,\bar\omega)$. Da ψ nicht entartet ist, ergibt sich daraus mit (11) und (15), daß $\Phi^s\circ g^*$ in $(\bar p, -d_{p_2}\psi(\bar s,\bar p,\bar p,\bar\omega))$ Kontakt unendlicher Ordnung mit der Identität hat. Hat g die Ordnung m, so hat also $\Phi^{m\bar s}$ Kontakt unendlicher Ordnung mit der Identität in $(\bar p, -d_{p_2}\psi(\bar s,\bar p,\bar p,\bar\omega))$. Benutzen wir jetzt (2), so können wir zu jedem $\varepsilon>0$ ein $t_\varepsilon\geqq 1$ so finden, daß für $t\geqq t_\varepsilon$

$$|J(t;\zeta a)|\leqq\varepsilon t^{n-1},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Literatur

[1] *J. Brüning, E. Heintze*, Representations of compact Lie groups and elliptic operators, Inventiones math. **50** (1979), 169—203.
[2] *J. Brüning*, Invariant eigenfunctions of the Laplacian and their asymptotic distribution, in: Global differential geometry and global analysis, Lecture Notes in Mathematics **838**, Berlin-Heidelberg-New York 1981, 69—81.
[3] *H. Donnelly*, Spectrum and the fixed point set of isometries. I, Math. Ann. **224** (1976), 161—170.
[4] *J. J. Duistermaat*, Fourier integral operators, New York 1973.
[5] *J. J. Duistermaat, V. Guillemin*, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Inventiones math. **29** (1975), 39—79.
[6] *J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, V. S. Varadarajan*, Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature, Inventiones math. **52** (1979), 27—93.
[7] *V. Guillemin, S. Sternberg*, Geometric asymptotics, Mathematical Surveys **14**, Providence 1977.
[8] *L. Hörmander*, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math. **121** (1968), 193—218.
[9] *L. Hörmander*, Fourier integral operators. I, Acta Math. **127** (1971), 79—183.
[10] *V. Ya. Ivrii*, Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, Functional Analysis Appl. **14** (1980), 98—106.
[11] *R. B. Melrose*, Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **36**, Providence 1980.
[12] *Pham The Lai*, Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres relatifs au laplacien, Math. Scand. **48** (1981), 5—38.
[13] *R. T. Seeley*, Complex powers of an elliptic operator, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **10**, Providence 1966.
[14] *R. T. Seeley*, A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$, Advances in Math. **29** (1978), 244—269.
[15] *R. T. Seeley*, An estimate near the boundary for the spectral function of the Laplace operator, Am. J. Math. **102** (1980), 869—902.
[16] *H. Weyl*, Classical Groups, Princeton 1973.

Fachbereich Mathematik, Universität-Gesamthochschule-Duisburg, Lotharstr. 65, D-4100 Duisburg

Eingegangen 28. Januar 1982