Math. Ann. 269, 95–101 (1984)

Mathematische Annalen

Spektrale Starrheit gewisser Drehflächen

Jochen Brüning[1] und Ernst Heintze[2]

1 Institut für Mathematik der Universität Augsburg, Memminger Straße 6, D-8900 Augsburg, Bundesrepublik Deutschland

2 Mathematisches Institut der Universität Münster, Einsteinstraße 62, D-4400 Münster, Bundesrepublik Deutschland

Wilhelm Klingenberg zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Ziel dieser Note ist der Beweis, daß eine zu S^2 homöomorphe Drehfläche mit zusätzlicher Symmetrieebene senkrecht zur Drehachse innerhalb dieser Klasse von Drehflächen eindeutig durch ihr Spektrum bestimmt ist. Genauer zeigen wir Folgendes.

Theorem. *Seien $M, \tilde{M}$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten isometrisch zu (S^2, g) bzw. $(S^2, \tilde{g})$, wobei $g, \tilde{g}$ unter den Drehungen um die z-Achse und der Spiegelung an der (x, y)-Ebene invariante Metriken sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$M, \tilde{M}$ sind isometrisch,*
(ii) *$M, \tilde{M}$ haben gleiches Spektrum,*
(iii) *$M, \tilde{M}$ haben gleiches S^1-invariantes Spektrum.*

Dabei ist das Spektrum von M die Folge der (nach der Größe und mit Vielfachheiten angeordneten) Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators; das S^1-invariante Spektrum ist die Teilfolge der Eigenwerte, die zu unter den Drehungen um die z-Achse (S^1-Aktion) invarianten Eigenfunktionen gehören (ebenfalls mit Vielfachheiten).

Unsere wesentliche Beobachtung ist die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii), anders ausgedrückt: man kann das invariante Spektrum aus dem ganzen Spektrum „heraushören". Damit können wir das Isometrieproblem auf ein singuläres inverses Sturm-Liouville-Problem reduzieren, das von Marčenko gelöst wurde.

2. Vorbemerkungen und der Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (iii)

In diesem Paragraphen sei $M = (S^2, g)$, g eine nur unter den Drehungen um die z-Achse invariante Metrik. Die minimalen Geodätischen vom Nordpol zum

Südpol (Meridiane) haben alle die gleiche Länge, die wir mit L bezeichnen. Wie das Gaußlemma zeigt, stehen diese Geodätischen senkrecht auf den S^1-Orbits (den Breitenkreisen). Daher ist die Abbildung

$$\pi: M \to [0, L], \quad p \mapsto d(n, p),$$

n der Nordpol, d der Riemannsche Abstand, eine Riemannsche Submersion. $[0, L]$ können wir mit dem Orbitraum M/S^1 identifizieren.

Sei $h(t) := \frac{1}{2\pi} \operatorname{vol} \pi^{-1}(t)$, $t \in [0, L]$. Dann gilt $h(0) = h(L) = 0$, $h'(0) = -h'(L) = 1$. Zwei solche Flächen $M, \tilde{M}$ sind isometrisch wenn $L = \tilde{L}$ und $h(t) = \tilde{h}(t)$ oder $h(t) = \tilde{h}(L-t)$ für $t \in [0, L]$. Denn in Polarkoordinaten (r, θ) um den Nordpol hat die Metrik die Form $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (h \circ \pi)^2 \end{pmatrix}$. Aus dieser Darstellung der g_{ij} ergibt sich auch die Darstellung des Laplace-Beltrami-Operators:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{h \circ \pi} \frac{\partial h \circ \pi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{(h \circ \pi)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \tag{1}$$

Insbesondere ist eine S^1-invariante Funktion $f \in C^\infty(M)$ Eigenfunktion zum Eigenwert λ genau dann, wenn für die heruntergedrückte Funktion $\bar{f}: [0, L] \to \mathbb{R}$, $\bar{f} \circ \pi = f$, gilt:

$$\bar{f}'' + \frac{h'}{h} \bar{f}' + \lambda \bar{f} = 0. \tag{2}$$

Setzen wir $u := h^{1/2} \bar{f}$, so ist (2) äquivalent mit

$$u'' + (\lambda - q) u = 0, \tag{3}$$

wobei

$$q = \frac{(h^{1/2})''}{h^{1/2}} = \frac{2hh'' - h'^2}{4h^2}. \tag{4}$$

Diese Überlegungen gelten natürlich alle nur in dem offenen Intervall $(0, L)$; $\frac{h'}{h}$ und q werden in den Randpunkten singulär und sind nicht einmal integrierbar über $[0, L]$.

Satz 1. *Das S^1-invariante Spektrum von M stimmt mit dem Spektrum des Operators $u \mapsto -u'' + qu$ in $L^2([0, L])$ bei geeignet gewählten Randbedingungen überein.*

Beweis. Sei $Tu := -u'' + qu$. Ist $\varphi \in C^\infty(M)$ eine invariante Eigenfunktion von Δ, so ist nach (3) $\bar{\varphi} \cdot h^{1/2}$ eine Eigenfunktion von T mit demselben Eigenwert, $\bar{\varphi}$ die heruntergedrückte Funktion. Die Linearkombinationen dieser Eigenfunktionen von T liegen dicht in $L^2([0, L])$, da die Linearkombinationen invarianter Eigenfunktionen dicht liegen in $L^2(M)^{S^1}$ und wir $L^2(M)^{S^1}$ vermöge der Abbildung $f \to \bar{f} \cdot h^{1/2}$ mit $L^2([0, L])$ identifizieren können (vgl. [4]). Als Definitionsbereich $\mathscr{D}$ von T können wir daher jeden Unterraum von $L^2([0, L])$ wählen, auf dem sich T definieren läßt, der diese Eigenfunktionen enthält und auf dem T symmetrisch ist.

Denn dann ist T mit diesem Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert und sein Spektrum besteht genau aus den Eigenwerten zu den Eigenfunktionen $\bar{\varphi} \cdot h^{1/2}$. Wir wählen

$$\mathscr{D} := \{u \in L^2([0,L])/u \in C^2((0,L)),\ Tu \in L^2([0,L]),\ (h^{-1/2}u),\ (h^{-1/2}u)' \text{ beschränkt}\}.$$

Es bleibt nur zu prüfen, daß T auf $\mathscr{D}$ symmetrisch ist. Das ist aber klar wegen

$$\begin{aligned}\int_0^L (uTv - vTu)(x) &= \int_0^L (uv'' - u''v)(x)dx = \lim_{x\to L}(uv' - vu')(x) - \lim_{x\to 0}(uv' - vu')(x)\\ &= \lim_{x\to L} h(x)(h^{-1/2}u(h^{-1/2}v)' - (h^{-1/2}u)'h^{-1/2}v)(x)\\ &\quad - \lim_{x\to 0} h(x)(h^{-1/2}u(h^{-1/2}v)' - (h^{-1/2}u)'h^{-1/2}v)(x)\\ &= 0. \quad \square\end{aligned}$$

Sei E_λ der Eigenraum des Laplace-Operators zum Eigenwert λ und $E_\lambda^{S^1}$ der Unterraum der S^1-invarianten Eigenfunktionen.

Satz 2. *Das S^1-invariante Spektrum ist einfach, d. h.*

$$\dim E_\lambda^{S^1} \leqq 1$$

für alle $\lambda \geqq 0$.

Beweis. Die Gleichung (2) ist eine Differentialgleichung mit regulär singulären Randpunkten (vgl. Bôcher [2]), da z. B. in der Nähe von Null $\frac{h'}{h}$ von der Form $\frac{1}{x} + g(x)$ mit einer Funktion $g \in C^\infty([0,L))$ ist. Die zugehörige Indexgleichung lautet:

$$v(v-1) + v = 0$$

mit den Wurzeln $v_1 = v_2 = 0$. Also [2] gibt es bei festem λ ein Fundamentalsystem der Form

$$f_1,\ f_2 + f_1 \cdot \log(x)$$

mit in $[0,L)$ stetigen f_1, f_2 und $f_i(0) \neq 0$ für $i = 0, 1$. Daher ist der Lösungsraum der in den Endpunkten beschränkten Funktionen höchstens eindimensional. $\square$

Satz 3. *Das Spektrum bestimmt das invariante Spektrum, insbesondere also die Länge L der Meridiane.*

Beweis. S^1 operiert in kanonischer Weise auf den Eigenräumen E_λ, die sich daher als direkte Summe S^1-irreduzibler Unterräume schreiben lassen. Da die nichttrivialen irreduziblen reellen Darstellungen von S^1 alle zweidimensional sind, gehört λ nach Satz 2 genau dann zum invarianten Spektrum, wenn $\dim E_\lambda$ ungerade ist. Aus der Verallgemeinerung der Weylschen asymptotischen Beziehung auf das invariante Spektrum [6, 4] folgt schließlich, daß das invariante Spektrum das Volumen des Orbitalraumes bestimmt, in unserem Fall also L. $\square$

Satz 4. *Die Länge L der Meridiane und die Funktion q aus Gleichung* (4) *bestimmen M.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß sich die Volumenfunktion h aus q rekonstruieren läßt. Wegen $q=\frac{(h^{1/2})''}{h^{1/2}}$ ist $h^{1/2}$ Lösung von $u''-qu=0$.

Da $q(x)=-\frac{1}{4x^2}+g(x)$ mit $g\in C^\infty([0,L))$ ist dies eine regulär singuläre Gleichung mit der Indexgleichung $\nu(\nu-1)+\frac{1}{4}=0$. Wieder nach Bocher [2] ist der Unterraum der Lösungen u mit „$x^{-1/2}u(x)$ beschränkt in der Nähe von Null" eindimensional. Daher ist h bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. Wegen $h'(0)=1$ folgt die Behauptung. □

3. Der Satz von Marčenko und der Beweis von (iii) ⇒ (i)

Borg [3] (s. auch Levinson [9]) hatte für das reguläre Sturm-Liouville Problem, $u\mapsto -u''+qu$ mit $q\in L^1([0,L])$, gezeigt, daß zwei Spektren des Operators, die zu geeigneten Randbedingungen gehören, die Funktion q eindeutig bestimmen und daß bei symmetrischem q, $q(L-x)=q(x)$, ein Spektrum genügt. Obwohl q aus (4) nicht integrierbar ist, läßt sich aber der Levinsonsche Beweis auch auf diese Situation übertragen. Das ist allerdings mit erheblichen technischen Problemen verbunden. Bequemer ist es, folgende Verallgemeinerung der Borgschen Resultate zu benutzen:

Satz 5 (Marčenko [10, Satz 2.3.2]). *Seien L_1, L_2 Differentialoperatoren auf $(0,L)$ der Form $L_iu=-u''+q_iu$, $i=1,2$, mit q_i integrierbar auf jedem Teilintervall $[0,l]$, $l<L$. Seien die Spektren von L_1, L_2 diskret, d.h. diskret für ein Paar von Randbedingungen (und dann diskret für jedes) und seien (α) bzw. (β) die Randbedingungen*

$$(\alpha)\quad u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0$$

und, wenn notwendig, eine Randbedingung bei L (d.h. im Grenzkreisfall).

$$(\beta)\quad u(0)\cos\beta+u'(0)\sin\beta=0$$

und dieselbe Randbedingung bei L wie in (α).

Ist $\cot(\alpha-\beta)\neq\infty$ und stimmen die Spektren von L_1 und L_2 sowohl unter den Randbedingungen (α) als auch (β) überein, so gilt $q_1=q_2$ fast überall.

Wir betrachten von nun an die noch etwas eingeschränktere Klasse von Flächen $M=(S^2,g)$, wobei g eine unter der S^1-Aktion (Drehung um die z-Achse) und der Spiegelung an der (x,y)-Ebene invariante Metrik ist. Es gilt in diesem Fall $h(L-x)=h(x)$ für die Volumenfunktion und $q(L-x)=q(x)$ für die Funktion aus (4), $x\in(0,L)$.

Um den Satz von Marčenko anwenden zu können, benötigen wir

Satz 6. *Es seien $0=\lambda_0'<\lambda_1'<\ldots<\lambda_n'\to\infty$ die S^1-invarianten Eigenwerte, $\varphi_i\in C^\infty(M)$ eine zu λ_i' gehörige S^1-invariante Eigenfunktion und $\bar\varphi_i\in C^\infty[0,L])$ die heruntergedrückte Funktion, $\varphi_i=\varphi_i\circ\pi$. Dann gilt:*

(i) $\bar{\varphi}_i$ *hat genau i Nullstellen in* $[0, L]$, *und diese liegen in* $(0, L)$;
(ii) *zwischen zwei Nullstellen von* $\bar{\varphi}_i$ *liegt genau eine Nullstelle von* $\bar{\varphi}_{i+1}$;
(iii) $\bar{\varphi}_{2i}(L-x)=\bar{\varphi}_{2i}(x)$, $\bar{\varphi}_{2i+1}(L-x)=-\bar{\varphi}_{2i+1}(x)$ *für* $x\in[0,L]$ *und* $i\in\mathbb{Z}_+$;
(iv) $\bar{\varphi}'_{2i}(L/2)=0$, $\bar{\varphi}_{2i+1}(L/2)=0$ *für* $i\in\mathbb{Z}_+$.

Beweis. (i) $\bar{\varphi}_i$ erfüllt (2), so daß nach [2] (vgl. den Beweis von Satz 2) $\bar{\varphi}_i$ in 0 und L nicht verschwinden kann. Die Aussage über die Anzahl der Nullstellen im Inneren beweist man analog zum regulären Fall (s. z. B. [5, S. 395]). Wir haben nämlich die Darstellung

$$\lambda'_i = \inf_{\substack{\varphi\in C^\infty(M)^{S^1}, \varphi\neq 0 \\ \varphi\perp\langle\varphi_0,\dots,\varphi_{i-1}\rangle}} \frac{\int_M |\operatorname{grad}\varphi|^2}{\int_M \varphi^2}.$$

Da die Knotengebiete der Funktionen φ_i S^1-invariant sein müssen, überträgt sich Courants Satz über die Anzahl der Knotengebiete [5, S. 393] sofort auf diesen Fall: φ_i hat höchstens $i+1$ Knotengebiete, $\bar{\varphi}_i$ also höchstens i Nullstellen. Ist K ein Knotengebiet von φ_i, so haben wir mit $n:=$ äußere Normale an K

$$(\lambda'_i-\lambda'_{i+1})\int_K \varphi_i\varphi_{i+1} = \int_K (\varphi_i\Delta\varphi_{i+1}-\Delta\varphi_i\varphi_{i+1}) = -\int_{\partial K}\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\varphi_{i+1}.$$

Also muß φ_{i+1} Nullstellen im Innern von K haben und $\bar{\varphi}_{i+1}$ hat immer mindestens eine Nullstelle zwischen zwei Nullstellen von $\bar{\varphi}_i$, aber auch mindestens eine in $(0, x_i)$ und (y_i, L), wenn x_i und y_i die kleinste bzw. größte Nullstelle von $\bar{\varphi}_i$ in $(0, L)$ bezeichnet. Durch Induktion folgt dann, daß $\bar{\varphi}_i$ auch mindestens i, also genau i Nullstellen in $(0, L)$ hat. Damit ist auch Behauptung (ii) bewiesen.

(iii) Da Δ mit der Spiegelung an der (x, y)-Ebene vertauscht und das invariante Spektrum einfach ist, gilt

$$\bar{\varphi}_i(L-x)^2=\bar{\varphi}_i(x)^2, \qquad x\in[0,L], \qquad i\in\mathbb{Z}_+.$$

Aus $\bar{\varphi}_i(L-x)=\bar{\varphi}_i(x)$ folgt $\bar{\varphi}'_i(L/2)=0$, also $\bar{\varphi}_i(L/2)\neq 0$, während aus $\bar{\varphi}_i(L-x) = -\bar{\varphi}_i(x)$ folgt $\bar{\varphi}_i(L/2)=0$.

Wegen der Symmetrie der Nullstellen gilt also $\bar{\varphi}_i(L-x)=-\bar{\varphi}_i(x)$ genau dann, wenn die Anzahl der Nullstellen ungerade ist. (iv) ist ebenfalls bewiesen. □

Beweis von (iii) ⇒ (i) *des Theorems.* Der letzte Satz zeigt, daß die Spektren von $u\to -u''+qu$ in $L^2([0, L/2])$ mit den Randbedingungen
(α) $u(L/2)=0$
(β) $u'(L/2)=0$
und der alten Randbedingung in 0, d. h. „$(h^{-1/2}u)$ und $(h^{-1/2}u)'$ beschränkt" durch das S^1-invariante Spektrum und damit durch das Spektrum von M bestimmt sind. Nach dem Satz von Marčenko genügen diese Spektren, um q zu bestimmen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.

4. Abschließende Bemerkungen

a) Es liegt nahe, eine Verallgemeinerung unserer Resultate auf solche G-Mannigfaltigkeiten ins Auge zu fassen, für die M/G ein Intervall ist. Tatsächlich überlegt man sich leicht, daß auch in diesem Fall das invariante Spektrum die Mannigfal-

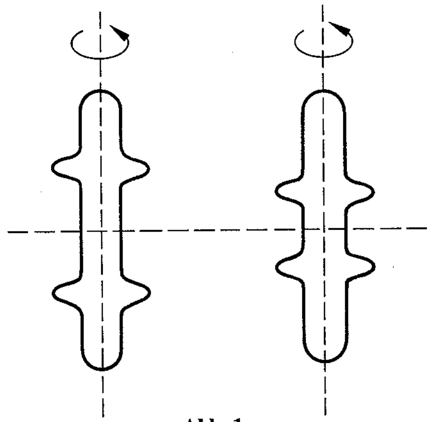

Abb. 1

tigkeiten bestimmt. Es scheint aber nicht möglich, auf einfache Weise das invariante Spektrum aus dem ganzen „herauszuhören".

b) Für Drehflächen homöomorph zu $S^1 x S^1$ versagt unsere Methode vollständig. Denn im allgemeinen ist dort das invariante Spektrum nicht einfach, es bestimmt aber auch die Funktion h nicht. Daß in dieser Situation viel weniger spektrale Starrheit zu erwarten ist, ergibt sich auch daraus, daß periodische Lösungen der Kortweg-de Vries-Gleichung einparametrige Familien isospektraler Potentiale q_t auf S^1 liefern [8].

Diese q_t kommen alle von S^1-invarianten Metriken auf $S^1 x S^1$ her, nämlich von den "warped products" $S^1 x_{h_t} S^1$, wobei $h_t^{1/2}$ die periodische (nichtverschwindende) Lösung von $-u'' + q_t u = 0$ ist.

c) Viele Ergebnisse über spektrale Starrheit werden mittels der asymptotischen Entwicklung von Minakshisundaram-Pleijel bewiesen. In unserem Fall ist das nicht möglich, wie das folgende Beispiel zeigt (vgl. Abb. 1). M sei eine zylindrische Drehfläche, an die zwei „Kappen" und zwei „Wülste" so angesetzt werden, daß M symmetrisch bleibt bzgl. der Spiegelung an der (x, y)-Ebene. Verschiebt man nun die Wülste unter Wahrung der zusätzlichen Symmetrie, so entsteht eine Familie von Drehflächen mit stets derselben asymptotischen Entwicklung für die Spur des heat kernel. Es gilt sogar noch mehr: bildet man die Spur nur über die zu einer festen Darstellung gehörigen Eigenwerte, so sind immer noch die asymptotischen Entwicklungen identisch. Dies beruht darauf, daß man je zwei Drehflächen M_1, M_2 dieser Schar so in gleich viele Teilgebiete D_i^1, D_i^2 zerlegen kann, daß je zwei strikt enthalten sind in zueinander isometrischen Teilgebieten $\bar{D}_i^1, \bar{D}_i^2$. Das zu entwickelnde Integral über D_i^1 bzw. D_i^2 ist aber asymptotisch gleich dem Integral über den heat kernel des Dirichletproblems in $\bar{D}_i^1$ bzw. $\bar{D}_i^2$. Diese Bemerkung zeigt, daß die Methode von Kac [7] im vorliegenden Fall nicht zum Erfolg führt. Unsere Ergebnisse lassen sich auch mit [1] vergleichen, wo stärkere Voraussetzungen gemacht werden.

Literatur

1. Bérard, P.: Quelques remarques sur les surfaces de révolution dans R^3. C.R. Acad. Sci. Paris **282**, 159–161 (1976)

2. Bôcher, M.: On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic. Trans. Am. Math. Soc. **1**, 40–52 (1900)
3. Borg, G.: Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Acta Math. **78**, 1–96 (1945)
4. Brüning, J., Heintze, E.: Representations of compact Lie groups and elliptic operators. Invent. Math. **50**, 169–203 (1979)
5. Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik. I. Springer: Berlin 1924
6. Donnelly, H.: *G*-spaces, the asymptotic splitting of $L^2(M)$ into irreducibles. Math. Ann. **237**, 23–40 (1978)
7. Kac, M.: On applying mathematics: reflections and examples. Quart. Appl. Math. **30**, 17–29 (1973)
8. Lax, P.: Periodic solutions of the KdV equation. In: Lectures in Appl. Mathematics, Vol. 15, pp. 85–96. Am. Math. Soc. Providence, RI (1974)
9. Levinson, N.: The inverse Sturm-Liouville problem. Mat. Tidsskr. B, 25–30 (1949)
10. Marčenko, V.A.: Some questions in the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order. I. Am. Math. Soc. Transl. **101**, 1–104 (1973)

Eingegangen am 15. Februar 1984