Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

2. Übung, 03. 05. 2006

1. Es sei $(Z_n, n \geq 0)$ ein Verzweigungsprozess mit der Nachkommensverteilung

$$p_j(\vartheta) = \frac{\vartheta^j p_j}{[\varphi(\vartheta)]^j}, j \geq 0$$

mit $p_j \geq 0\,(j \geq 0), \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ und $\vartheta \in \Theta := \{\sum_{j\geq 0} \vartheta^j p_j =: \varphi(\vartheta) < \infty\}$.
Das bedeutet, Z_n ist die Anzahl der Individuen in einer bestimmten Population zur Zeit n (d.h., in der n-ten Generation). Jedes Individum erzeugt in einer Zeiteinheit unabhängig von den anderen und von der Vergangenheit eine zufällige Anzahl von neuen Individuen, diese Anzahl habe die Verteilung $(p_j(\vartheta), j \geq 0)$, der Parameter ϑ sei unbekannt.
Man berechne:

   a) Die Likelihoodfunktion
   $L_n(\vartheta; i_1, i_2, \cdots, i_n) = P_\vartheta(Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \cdots, Z_n = i_n)$

   b) Eine Maximum-Likelihood Schätzung für ϑ

   c) $E_\vartheta Z_n, \mathrm{Var}_\vartheta(\mathrm{Z_n})$

   d) Man gebe eine Maximum-Likelihood Schätzung für $\mu(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(\vartheta)$ an.

2. Es sei $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ eine Markovsche Kette auf dem Zustandsraum $\{0, 1\}$ mit $X_0 = i_0 \in \{0, 1\}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_0 = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0), q_0 = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0), p_1 = \mathbb{P}(X_{x+1} = 0|X_n = 1)$ und $q_1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1)$.

   a) Stellen Sie die Likelihoodfunktion auf und bestimmen Sie Maximum-Likelihood-schätzungen von p_0, q_0, p_1, q_1.

   b) Untersuchen Sie die erhaltenen Schätzungen hinsichtlich Erwartungstreue und Streuung.

3. Es seien $(N(t), t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit dem Parameter $\lambda > 0, (Y_k, k \geq 1)$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit der stückweise stetigen Dichte $f_\vartheta(\cdot)$, $(\vartheta \in \Theta \subseteq R^1)$. Es gelte: $\{f_\vartheta > 0\}$ ist unabhängig von ϑ. Durch

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \ , \ t \geq 0$$

ist ein sogenannter zusammengesetzter Poissonprozess $X = (X(t), t \geq 0)$ definiert.

a) Skizzieren Sie eine "typische" Trajektorie von $X(\cdot)$.

b) Bestimmen Sie den Likelihood-Prozess $L_t(\vartheta, \vartheta_0, Y)$. (formale Rechnung genügt)

c) Wie lautet der Maximum-Likelihood Schätzer für (λ, ϑ)?