Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

3. Übung, 17. 05. 2006

1. Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, $(X_n, n \geq 1)$ eine Folge reellwertiger Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A})$, die bezüglich P und bezüglich Q voneinander unabhängig sind, und deren Verteilungen P_n bzw. Q_n gegeben sind durch

$$P_n(B) = P(X_n \in B),\ Q_n(B) = Q(X_n \in B),\ B \in \mathfrak{B}_1, n \geq 1.$$

Es gelte $Q_n \ll P_n$ und es sei

$$f_n := \frac{dQ_n}{dP_n},$$

$$\varsigma_n := \int_{R_1} f_n^{\frac{1}{2}} dP_n,\ n \geq 1.$$

a) Man zeige: Für jedes $n \geq 1$ ist das Produktmaß $Q^{(n)} := \prod_{k=1}^{n} Q_k$ absolutstetig bezüglich $P^{(n)} := \prod_{k=1}^{n} P_k$.

b) Man berechne

$$L_n(x) = \frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}}(x), \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_n$$

c) Mit P_∞ bzw. Q_∞ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $(X_n, n \geq 1)$ bez. P bzw. Q auf $(R_\infty, \mathfrak{B}_\infty)$ mit $\mathfrak{B}_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} {}^{\otimes}\mathfrak{B}_1$ bezeichnet. Man beweise:

$(L_n(x), \prod_1^n {}^{\otimes}\mathfrak{B}_1)$ ist bezüglich P_∞ ein nichtnegatives Martingal und $(L_n^{\frac{1}{2}}(x), \prod_1^n {}^{\otimes}\mathfrak{B}_1)$ ist bez. P_∞ ein nichtnegatives Supermartingal.

d) Man schlussfolgere mittels c), dass Q_∞ entweder absolutstetig bez. P_∞ oder singulär zu P_∞ ist, je nachdem, ob $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \varsigma_k > 0$ oder $= 0$ gilt.
(Aufgabe 1d) erfordert Stoff, der in der Vorlesung später behandelt wird.)

2. Es seien $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein statistisches Modell mit $\varrho = (P_\vartheta, \vartheta \in \Theta)$ und $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration in $\mathscr{F}$. Mit τ werde eine $(\mathscr{F}_t)$-Stoppzeit bezeichnet: $\tau|\Omega \to [0,\infty]$ mit $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t, t \geq 0$. $P_\vartheta^{\mathscr{F}_t}$ sei dominiert durch ein $P^{\mathfrak{F}_t}(\vartheta_0 \in \Theta$, fest gewählt) für jedes $t \geq 0$.

$$L_t(\vartheta;\omega) := \frac{dP_{\vartheta|\mathscr{F}t}}{dP_{\vartheta_0|\mathscr{F}_t}}(\omega).$$

Man zeige, dass für jedes $A \in \mathscr{F}_\tau$ gilt:

$$P_\vartheta(A \cap \{\tau < \infty\}) = \int\limits_{A\cap\{\tau<\infty\}} L_\tau(\vartheta;\omega) dP_{\vartheta_0}(\omega)$$

(Fundamentalidentität der Sequentialstatistik)
Hinweis: Man weise die Gleichung zunächst für $\tau \wedge t$ $(t \geq 0)$ nach.

3. Es sei $(\omega_t, t \geq 0)$ bzw. P_ϑ ein Wienerscher Prozess mit Drift $\vartheta > 0$ und Diffusionskonstanten $\sigma^2 > 0$. Weiterhin sei $\tau_a := \min\{t > 0|\omega_t = a\}(a > 0)$. Zeigen Sie, dass $P_\vartheta(\tau_a < \infty) = 1$ gilt und nutzen Sie die Fundamentalidentität zur Bestimmung der Laplace-Transformierten $E_0\ \mathrm{e}^{-\lambda\tau_\mathrm{a}},\ \lambda > 0$.