Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

4. Übung, 31. 05. 2006

1. Es sei $(X_t, t \geq 0)$ ein Wienerscher Prozess mit Drift $\mu \in R_1$ und Diffusionskoeffizient $\sigma^2 > 0$. Man zeige, dass für jede Borelmenge $C \in \mathfrak{B}_n$ und alle $t_1, t_2, \dots, t_n$ mit $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n =: T$ gilt: die Wahrscheinlichkeit

   $P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in C \mid X_T = \omega)$

   hängt nicht von μ ab.

2. Es seien $(X_n, n \geq 1)$ und X reellwertige nichtnegative Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, und es gelte

   $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X \quad P-\text{fast sicher} \quad \text{und} \quad \lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX < \infty.$

   Man beweise, dass dann auch gilt:

   $\lim\limits_{n\to\infty} E\,|X_n - X| = 0.$

3. Man überzeuge sich davon, dass

   a) jede in $L_2(P)$ beschränkte Folge $(X_n, n \geq 1)$ von Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gleichgradig integrierbar ist,

   b) jede P-fast sicher konvergente Folge $(X_n, n \geq 1)$, die gleichgradig integrierbar ist, auch im Sinne des $L_1(P)$-konvergiert: $E\,|X_n - X_\infty| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Es seien $(T_n, n \geq 1)$ eine Folge positiver Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

   $0 =: T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots \quad P - f.s.$

   Wir definieren $G_n := \sigma(T_1, T_2, \dots, T_n)$,

   $N_t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}\ ,\ \mathscr{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t).$

   Man zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

   $\mathscr{F}_t \cap \{N_t = n\} = G_n \cap \{N_t = n\}.$