

*Elementare  
Wahrscheinlichkeitstheorie*

Stochastik I

Prof. Dr. Uwe Küchler  
Institut für Mathematik  
Humboldt-Universität zu Berlin

Sommersemester 2007

12. April 2007

e-mail: [kuechler@mathematik.hu-berlin.de](mailto:kuechler@mathematik.hu-berlin.de)  
[www.mathematik.hu-berlin.de/~kuechler](http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuechler)



# Kapitel 1

## Einleitung

Diese Vorlesung handelt vom Zufall, genauer, von der Mathematik des Zufalls. Mit dem Zufall haben wir täglich zu tun. Wir sagen, ein Ereignis hänge vom Zufall ab und sprechen von einem *zufälligen Ereignis*, wenn es nicht gewiss ist, ob dieses Ereignis eintritt oder nicht. Eine Größe, deren Wert nicht genau vorhergesagt werden kann, bezeichnen wir als eine *zufällige Größe* oder *Zufallsgröße*.

So wird zum Beispiel die zeitliche Dauer des Weges von zu Hause zur Universität vom Zufall beeinflusst. Der finanzielle Schaden, den ein PKW-Unfall verursacht, hängt vom Zufall ab, Messungen physikalischer Größen werden vom Zufall beeinträchtigt.

Bedeutende Größen zufälliger Natur sind weiterhin die Lebenszeit von Menschen, das Geschlecht Neugeborener, Niederschlagsmengen eines Monats, aber auch Kurse am Aktienmarkt und das Ergebnis von Fußballspielen. Die Reihe der Beispiele läßt sich mühelos fortsetzen. Der Zufall ist überall.

Zufall in reiner Form findet man bei Glücksspielen. Die Augenzahl beim Werfen eines Würfels, die Zahl, bei der die Roulettekugel nach dem Ausrollen liegen bleibt, das Skatblatt, das man nach gutem Mischen und Austeilen erhalten hat, sind rein zufällig. Hier ist der Zufall erwünscht.

Der Einfluss des Zufalls wird allerdings häufig als unangenehm und störend empfunden. Er verursacht *Risiken*, also die Gefahr, dass Schäden entstehen. Wir versuchen ihn deshalb zurückzudrängen, möglichst auszuschließen. Das Ergebnis einer Klausur oder Prüfung wollen wir möglichst nicht vom Zufall in negativer Hinsicht beeinflusst wissen, also bereiten wir uns möglichst gut vor (ein Restrisiko bleibt natürlich: Aufgaben, die wir nicht lösen können, nervli-

che Anspannung usw.) Unfällen, die häufig durch "Verkettung unglücklicher Umstände" entstehen, beugt man durch technische Überwachung, Schulungen usw. vor.

Völlig unterdrücken lässt sich der schädliche Zufall meist nicht oder nur mit extrem großem Aufwand. Wenn man ihn aber schon nicht eliminieren kann, so möchte man die durch ihn verursachten Risiken aber einschätzen, um vorbereitet zu sein. Ein Mittel dafür ist die Stochastik, die Mathematik des Zufalls.

Der Zufall macht zukünftige Ereignisse ungewiss. Er schafft Risiken, aber auch Chancen. Die Stochastik stellt mathematische Verfahren zur Verfügung, mit deren Hilfe man zufällige Erscheinungen, Chancen und Risiken, rechnerisch bewerten kann. Sie gliedert sich in *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Mathematische Statistik*.

Unter der *Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses* verstehen wir, kurz gesagt, den *Grad der Gewissheit seines Eintretens*. Sie kann Werte zwischen Null und Eins annehmen. Dabei ordnet man Ereignissen, die praktisch nicht eintreten können, den Wert Null zu, Ereignissen, die mit Sicherheit eintreten, den Wert Eins. Am meisten unbestimmt ist das Eintreten von Ereignissen mit der Wahrscheinlichkeit  $1/2$ .

Mit dem Zufall haben die Menschen seit jeher zu tun. Wetter, Krankheit, Nahrungssuche, Tod waren fundamentale Größen, von denen die Menschen abhängen und die durch Zufall geprägt waren. Es gab vielfältige Versuche, hier dem Zufall auf die Spur zu kommen, seine Herrschaft einzudämmen bzw. sein Wirken aufzuklären. Die ersten mathematischen Ansätze haben ihre Ursprünge in Problemen, die sich bei der Organisation von Versicherungsgesellschaften (z.B. Berechnung von Versicherungsprämien) ergaben und solchen, die bei der Beurteilung von Fragen von Glücksspielen entstanden.

Im Laufe der Zeit hat die Bedeutung des richtigen Umganges mit dem Zufall, insbesondere seine angemessene quantitative Beschreibung, noch zugenommen. In modernen technischen Produkten wie Flugzeugen, Schiffen, Eisenbahnen sind außerordentlich viele Einzelteile vereint und müssen für einen reibungslosen Ablauf zuverlässig funktionieren. Kleine zufällige Störungen können Unfälle mit größten Sach- und Personenschäden verursachen. Ohne eine genaue mathematische Analyse aller auftretenden Risiken wäre der Betrieb solcher technische Produkte nicht mehr denkbar, Unglücke würden wesentlich öfter auftreten. Aber auch für das Verständnis vieler Naturvorgänge kommt man heute

nicht mehr ohne Einbeziehung des Zufalls aus.

Denken wir an die Evolution im Pflanzen- und Tierreich, die man auf zufällige Mutationen mit anschließender natürlicher Auslese zurückführt, oder an die Begriffswelt der Quantenphysik, wo man den Ort eines Teilchens nicht mehr exakt bestimmen kann und als Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert.

Zufall, Chance und Risiko sind Begriffe, die im Gegensatz zu vielen physikalischen Größen wie Temperatur, Länge, Gewicht nicht sinnlich wahrnehmbar sind. Für viele Menschen haben sie heute noch etwas Unheimliches, Mystisches und auch Reizvolles an sich. Die Abhängigkeit vom Zufall weckt Hoffnung und Angst. Die Menschen spielen Lotto bzw. tragen ein Maskottchen. Das muss nicht schlimm sein. Problematisch ist es erst, wenn man Risiken und Chancen, auch für das persönliche Leben, nicht richtig abschätzt und damit eventuell Gefahren für Hab und Gut oder gar die Gesundheit und das Leben eingeht.

Was ist nun eigentlich Zufall? Diese alte und schwierige Frage gehört zur Philosophie und soll hier nicht behandelt werden.

Die Vorlesung soll die Hörer mit einigen grundlegenden Begriffen der Stochastik bekannt machen, typische Denk- und Schlussweisen vorstellen und einige wichtige Gesetzmäßigkeiten des Zufalls nahe bringen.

Das Wissen um den Zufall, die damit verbundenen Begriffe und Methoden des Umganges mit dem Zufall ist heute Allgemeingut aller Wissenschaftszweige und gehört auch um notwendigen Alltagswissen. Vielen Menschen ist das genauere Wissen um den Zufall jedoch noch fremd.

Das vorliegende Skript entstand auf der Grundlage von Vorlesungen über Elemente der Stochastik, die ich in Abständen von Jahren mehrfach für Studierende der Mathematik gehalten habe. Dennoch ist die schriftliche Ausarbeitung eines Skriptes immer auch eine aufwändige Arbeit. Ich danke unserer Institutssekretärin Frau S. Bergmann für die umfangreiche Arbeit am Skript und die unendliche Geduld gegenüber meinen zahlreichen Änderungswünschen.

Mein Dank geht weiterhin an unsere wissenschaftlichen Mitarbeiter und Studierenden, die durch kritische und konstruktive Hinweise zur Vorjahresversion dieses Skriptes erheblich zu einer gründlichen Überarbeitung beigetragen haben. Dazu gehören u. a. Dr. Markus Riedle und die Diplommathematiker Thomas Knispel, Katja Krol, Hagen Gilsing sowie die Studierenden Andrea

Konieczny und Friedrich Bolz. Herr H. Gilsing hat für das vorliegende Skript die Graphiken erstellt. Auch dafür danke ich ihm.

Dieses Skript enthält sicher noch eine Reihe von Fehlern, insbesondere Druckfehler, aber auch andere Unzulänglichkeiten. Dafür bin ich allein verantwortlich. Ich bitte die Hörer der Vorlesung und andere Leser um Nachsicht und bin sehr dankbar für kritische und helfende Hinweise.

Vieles wird in der Vorlesung vorkommen, zum Beispiel weitere Bilder, Graphiken, interessante Beispiele und Anwendungen, das im Skript nicht enthalten ist. Andererseits werden in der Vorlesung manche Ausführungen des Skriptes nur gestreift werden, zum Beispiel gewisse Elemente der Maß- und Integrations-*theorie*. Sie wurden teilweise nur aufgenommen, um eine gewisse Geschlossenheit der Darstellung und eine Festlegung der Terminologie zu erreichen.

An der Lehrveranstaltung Stochastik I werden mehrere erfahrene wissenschaftliche Mitarbeiter und Studierende höherer Semester als Übungsleiter und Korrektoren der schriftlich anzufertigenden Übungen beteiligt sein. Wir sind gespannt, freuen uns auf die Arbeit mit den Studierenden im Sommersemester 2007 und wünschen uns allen viel Erfolg!

Uwe Küchler

Berlin, 11. April 2007

# Literaturverzeichnis

- [1] Bauer, H.: Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter, 1990
- [2] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. 4. Auflage, de Gruyter, Berlin, 1991
- [3] Dehling, H., Haupt, B.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Springer, 2004
- [4] Elstrodt, J.: Maß- und Integrationstheorie, Springer, 1999
- [5] Henze, N.: Stochastik für Einsteiger, 6. Auflage, 2006
- [6] Hesse, Ch.: Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie, Vieweg, 2003
- [7] Krenzel, U.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Vieweg, 6. Auflage, 2002
- [8] Jacod, J. and Protter, Ph.: Probability Essentials, Springer 2000
- [9] Müller, P.H. u.a.: Lexikon der Stochastik, Akademie-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1991
- [10] Müller, P.H.; Neumann, R. und Storm, R.: Tafeln zur Mathematischen Statistik, Fachbuchverlag, Leipzig 1973
- [11] Pfanzagl, J.: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, de Gruyter Berlin, 2. Auflage, 1991
- [12] Pitmann, J.: Probability, Springer 1993
- [13] Renyi, A.: Briefe über die Wahrscheinlichkeit, Dt. Verlag der Wiss., Berlin, 1969

- [14] Siraeu, A.N.: Wahrscheinlichkeit, Dt. Verlag der Wiss., Berlin, 1988
- [15] Winkler, M.: Vorlesungen zur Mathematischen Statistik, Teubner, Leipzig, 1983