# Kapitel 10

# Gesetze der großen Zahlen

## 10.1 Einführung

Im ersten Kapitel wurde auf eine Erfahrungstatsache im Umgang mit zufälligen Erscheinungen aufmerksam gemacht, die man gewöhnlich als empirisches Gesetz der großen Zahlen bezeichnet. Gemeint ist die Beobachtung, dass sich bei häufiger Wiederholung eines zufälligen Experimentes der Zufall "ausmittelt", das heißt, dass sich die relativen Häufigkeiten des Eintretens eines mit dem Versuch verbundenen Ereignisses mit wachsender Versuchsanzahl stabilisieren. Eng verbunden damit ist die Beobachtung, dass auch die arithmetischen Mittel der beobachteten Werte einer wiederholt realisierten zufälligen Größe in ähnlicher Weise einem festen Wert zuzustreben scheinen (siehe Abschnitt 3.1).

Diese Erfahrungen sollten sich in einer Wahrscheinlichkeitstheorie als Theoreme wiederfinden. In der Tat liefert die Theorie eine Gruppe von Aussagen über die Konvergenz arithmetischer Mittel von Zufallsgrößen, die man gemeinhin als Gesetze der großen Zahlen bezeichnet. Sie unterscheiden sich in der Konvergenzart der arithmetischen Mittel und in der Art der Voraussetzungen an die zugrunde liegenden Zufallsgrößen.

Die Gesetze der großen Zahlen klären im Rahmen der Kolmogorov'schen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie die Bedingungen an die untersuchten Zufallsgrößen, unter den ihre arithmetischen Mittel im geeigneten Sinne konvergieren und identifizieren ihren Grenzwert. Der Grenzwert steht dabei häufig in

Verbindung mit den Erwartungswerten der betrachteten Zufallsgrößen.

In den folgenden Abschnitten seien $(X_n, n \geq 1)$ eine Folge reellwertiger Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ ihre $n$-te Partialsumme und $M_n = \frac{1}{n} S_n$ ihr $n$-tes arithmetischen Mittel, $n \geq 1$.

Die Fragestellung der Gesetze der großen Zahlen ist:

*Unter welchen Bedingungen an die Zufallsgrößen $X_n, n \geq 1$, konvergiert die Folge $(M_n, n \geq 1)$ in welchem Sinne gegen welchen Grenzwert?*

Gesetze der großen Zahlen gibt es in sehr vielen Varianten. Wir geben hier nur einige wenige exemplarisch an. Weitere interessante Versionen mit samt ihren Anwendungen findet man z. B. in den Monographien zur Wahrscheinlichkeitstheorie von Siraev (1988), Jacod, Protter(2000) oder Bauer (1991).

## 10.2 Schwache Gesetze der großen Zahlen

Als schwache Gesetze der großen Zahlen bezeichnet man gewöhnlich Aussagen, die die stochastische Konvergenz der arithmetischen Mittel $M_n, n \geq 1$ betreffen.

Wir stellen zunächst die Definition und einige Eigenschaften der stochastischen Konvergenz voran. Die Beweise findet man z. B. in Siraev (1988) oder Jacod, Protter (2000).

**Definition 10.1** *Eine Folge $(Y_n, n \geq 1)$ reellwertiger Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ heißt stochastisch konvergent gegen eine reellwertige Zufallsgröße $Y$, falls $\lim_{n \to \infty} P(|Y_n - Y| > \varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.*

Symbolisch schreibt man in diesem Fall $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

Die stochastische Konvergenz ist identisch mit der aus der Maßtheorie bekannten Konvergenz dem Maß $P$ nach.

Mitunter spricht man auch von der *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit*.

Offenbar konvergiert eine Folge $(Y_n)$ genau dann stochastisch gegen $Y$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} P(|Y_m - Y| > \varepsilon) = 0. \tag{10.1}$$

Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass die stochastische Konvergenz einer Folge $(Y_n)$ gegen eine Zufallsgröße $Y$ äquivalent damit ist, dass man in jeder Teilfolge $(Y_{n_k})$ eine Unterfolge $(Y_{n_{k_l}})$ finden kann, die $P$-fast sicher gegen $Y$ konvergiert.

Aus der stochastischen Konvergenz von $(Y_n)$ gegen $Y$ ergibt sich die schwache Konvergenz ihrer Verteilungen:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R_1} f(x)P^{Y_n}(dx) = \int\limits_{R_1} f(x')P^{Y}(dx),\; f \in \mathbb{C}(R_1), \tag{10.2}$$

wobei $\mathbb{C}(R_1)$ die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen auf $R_1$ bezeichnet.

Die Beziehung (10.2) gilt genau dann, wenn die Verteilungsfunktionen $F_n$ von $Y_n$ in allen Punkten $x$, in denen die Verteilungsfunktion $F$ der Zufallsgröße $Y$ stetig ist, gegen $F(x)$ konvergieren. Man bezeichnet diese Art der Konvergenz auch als *Konvergenz in Verteilung* und schreibt symbolisch $Y_n \xrightarrow{d} Y$ bzw. $F_n \xrightarrow{d} F$.
Aus der schwachen Konvergenz der Verteilungen von $(Y_n)$ folgt umgekehrt im Allgemeinen noch nicht die stochastische Konvergenz der Zufallsgrößen $(Y_n)$. Wir haben aber die

**Aussage 10.2** *Gilt für alle $f \in \mathbb{C}(R_1)$ und ein $x_0 \in R_1$*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R_1} f(x)P^{Y_n}(dx) = f(x_0),$$

*so konvergiert $(Y_n)$ stochastisch gegen die Zufallsgröße $Y$, die $P$-fast sicher gleich $x_0$ ist.*

Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$ und für $f_\varepsilon \in \mathbb{C}(R_1)$, definiert durch

$$f_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]^c}(x) + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(x-\varepsilon;x+\varepsilon)}(x)|x - x_0|$$

gilt $f_\varepsilon(x_0) = 0$ und

$$P(|Y_n - x_0| > \varepsilon) \leq \int\limits_{R_1} f_\varepsilon(x) P^{Y_n}(dx) \longrightarrow f_\varepsilon(x_0) \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

$\square$

Wir kommen nun zur Formulierung zweier schwacher Gesetze der großen Zahlen.

**Aussage 10.3 (1. Schwaches Gesetz der großen Zahlen)** *Gilt $D^2 X_n \leq C < \infty, n \geq 1$ für ein $C > 0$ und $Kov(X_k, X_l) = 0$ für alle $k, l \geq 1$ mit $k \neq l$, so konvergieren die zentrierten arithmetischen Mittel $(M_n - EM_n, n \geq 1)$ stochastisch gegen Null:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - EM_n| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

*Sind insbesondere alle Erwartungswerte $EX_n, n \geq 1$, gleich $(EX_n \equiv EX_1)$, so konvergieren die Mittel $(M_n, n \geq 1)$ stochastisch gegen $EX_1$:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - EX_1| > \varepsilon) = 0, \quad \forall > 0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
D^2(M_n) &= E(M_n - EM_n)^2 = \frac{1}{n^2} E(\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k))^2 = \\
&\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(X_k - EX_k)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{k\neq\ell} E(X_k - EX_k)(X_\ell - EX_\ell) = \\
&\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} D^2 X_k + \sum_{k\neq\ell} Kov(X_k, X_\ell)) = \\
&\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2 X_k \leq \frac{C}{n}.
\end{aligned}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt folglich

$$P(|M_n - EM_n| > \varepsilon) \leq D^2 \frac{M_n}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}$$

(Tschebyschev'sche Ungleichung).

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Sind die $(X_n, n \geq 1)$ nicht unkorreliert, so liegt im allgemeinen keine Konvergenz der zentrierten arithmetischen Mittel $(M_n - EM_n, n \geq 1)$ vor oder die Konvergenz erfolgt nicht gegen eine Konstante. Als Beispiel betrachten wir für eine reellwertige Zufallsgröße $X$ die Folge $X_n = X, n \geq 1$, und erhalten $M_n = X, n \geq 1$.

Wir geben ein weiteres schwaches Gesetz der großen Zahlen an, in dem auf die Endlichkeit der Varianzen verzichtet wird.

**Aussage 10.4 (2. Schwaches Gesetz der großen Zahlen)** *Es seien* $(X_n, n \geq 1)$ *unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit* $E|X_1| < \infty$*, wir setzen* $\mu = EX_1$.

*Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| > \varepsilon) = 0 \textit{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

Beweis: Es sei

$$\varphi(u) = \mathrm{E}e^{iuX_1} \text{ und } \varphi_{M_n}(u) = \mathrm{E}e^{iuM_n}, u \in R_1.$$

Dann gilt

$$\varphi_{M_n}(u) = [\varphi(\frac{u}{n})]^n, u \in R_1, \text{ und}$$

$$\varphi(u) = 1 + iu\mu + o(u) \text{ für } u \to 0.$$

Folglich ist für jedes $u \in R_1$

$$\varphi(\frac{u}{n}) = 1 + i\frac{u}{n} \cdot \mu + o(\frac{1}{n}) \text{ für } n \to \infty$$

und somit

$$\varphi_{M_n}(u) = [1 + \frac{iu}{n}, \cdot\mu + o(\frac{1}{n})]^n \to \mathrm{e}^{iu\mu}, \ u \in R_1.$$

Die Funktion $u \to \mathrm{e}^{iu\mu}$ ist die charakteristische Funktion der in $\mu$ ausgearteten Verteilung und deshalb gilt

$$M_n \xrightarrow{d} \mu,$$

woraus sich auf Grund der entsprechenden obigen Aussage die Behauptung ergibt. □

## 10.3 Starke Gesetze der großen Zahlen

Als starke Gesetze der großen Zahlen bezeichnet man Aussagen, die die $P$-fast sichere Konvergenz der arithmetischen Mittel $M_n, n \geq 1$ betreffen.
Die $P$-fast sichere Konvergenz ist im allgemeinen sehr viel schwieriger zu beweisen, als die stochastische Konvergenz, liefert dafür aber auch für alle $\omega$ außerhalb einer Nullmenge $N$ die Konvergenz der $M_n(\omega)$ gegen einen Grenzwert, wogegen bei der stochastischen Konvergenz nichts über die "individuellen" $\omega$ bzw. $M_n(\omega)$ ausgesagt wird.
Es ist interessant, dass es sich bei starken Gesetzen der großen Zahlen tatsächlich nur um eine Konvergenz $P$-fast sicher handelt. Das heißt, dass diese Konvergenz im Allgemeinen nicht für alle $\omega$ aus $\Omega$ vorliegt. Wir werden diese in 10.4.

an einem Beispiel demonstrieren.

Aus der Fülle der in der Literatur vorhandenen starken Gesetze der großen Zahlen greifen wir drei Beispiele zur Illustration heraus. Für den Beweis der ersten beiden verweisen wir wieder auf Siraev (1988), das dritte werden wir hier beweisen, um einen Einblick in die Technik des Arbeitens mit der fast sicheren Konvergenz zu geben.

**Aussage 10.5** *Es sei* $(X_n, n \geq 1)$ *eine Folge reellwertiger, voneinander unabhängiger Zufallsgrößen mit* $EX_n = 0, n \geq 1$.

*a) Ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty, \tag{10.3}$$

*so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *P-fast sicher,*

*b) Sind die* $X_n$ *überdies gleichmäßig beschränkt* ($P(|X_n| \leq c) = 1,\ n \geq 1,$ *für ein* $c > 0$)*, so folgt aus der P-fast sicheren Konvergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *die Eigenschaft (10.3).*

**Beispiel 10.6** Es seien $(X_n, n \geq 1)$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit

$$P(X_n = +1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}, n \geq 1,$$

und $(c_n, n \geq 1)$ eine beschränkte Folge positiver reeller Zahlen.

Genau dann konvergiert die Reihe $P$-fast sicher,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n,$$

wenn $\sum c_n^2 < \infty$ erfüllt ist.

**Aussage 10.7** *Die Folge* $(X_n, n \geq 1)$ *bestehe aus voneinander unabhängigen Zufallsgrößen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{b_n^2} < \infty$$

*für eine Folge positiver Zahlen* $b_n$ *mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

*Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{b_n} = 0 \ P - \textit{fast sicher.}$$

**Beispiel 10.8** Aus der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$$

folgt, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - ES_n}{n} = 0 \ P - \text{fast sicher.}$$

Zum Beweis dieser beiden Aussagen siehe z. B. Siraev (1988), Kap. IV,  2 und 3.

**Satz 10.9 (Kolmogorov'sches Starkes Gesetz der großen Zahlen)** *Die* $(X_n)$ *seien voneinander unabhängig und identisch verteilt. Dann gilt:*

*a) Existiert der Erwartungswert* $EX_1$ *und ist er endlich (d.h.* $E|X_1| < \infty$*), so konvergiert* $(M_n)$ $P$*-fast sicher mit*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1 \qquad (P - \textit{f.s.})$$

*b) Ist* $E|X_1| = \infty$*, so konvergiert* $(M_n)$ $P-$*fast sicher nicht gegen einen endlichen Grenzwert.*

c) *Ist* $EX_1^+ = \infty$ *und* $EX_1^- < \infty$ *, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty \qquad (P - f.s.)$$

Bemerkung: Aus dem Beweis wird deutlich werden, dass es im Fall a) bereits ausreicht voraus zu setzen, dass die $X_n$ paarweise unabhängig sind.

Beweis: Zu a)
Die $X_n, n \geq 1$ seien paarweise unabhängig, identisch verteilt und es gelte $E|X_1| < \infty$.

Wir gliedern den Beweis in sechs Schritte.

1. Vorbereitungen: Wegen $X_n = X_n^+ - X_n^-$ und $E|X_n| < \infty$ folgt $EX_n^\pm < \infty$ und wir können $X_n^+$ und $X_n^-$ einzeln betrachten. O.B.d.A. sei also $X_n \geq 0, n \geq 1$. Wir setzen

$$Y_n := X_n \cdot \mathbb{1}_{\{X_n < n\}},\ n \geq 1.$$

   Die Zufallsgrößen $Y_n, n \geq 1$ sind ebenfalls paarweise unabhängig (Beweis?), allerdings nicht notwendig identisch verteilt. Es gilt aber $D^2 Y_n < \infty, n \geq 1$.
   Nun sei

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k, \text{woraus sich}$$

$$E\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} EY_k, \quad n \geq 1, \text{ergibt.}$$

   Es seien $\varepsilon > 0, \alpha > 1$ beliebig, aber fest gewählt.

   Wir führen ein:

$$k_n := [\alpha^n] = \max\{k \geq 1 : k \leq \alpha^n\}, n \geq 1,$$

(offenbar gilt $k_n \leq k_{n+1} \uparrow \infty$ und $\alpha^n - 1 < k_n \leq \alpha^n,\ n \geq 1$),

$$n_i := \min\{n : k_n \geq i\},\ i \geq 1.$$

Aus diesen Definitionen folgt sofort

$$\alpha^{n_i} \geq [\alpha^{n_i}] = k_{n_i} \geq i\ , \quad i \geq 1. \tag{10.4}$$

2. Der nächste Schritt ist der Beweis des folgenden Lemmas.

**Lemma 10.10** *Für eine positive Konstante $C$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\frac{|\tilde{S}_{k_n} - E\tilde{S}_{k_n}|}{k_n} \geq \varepsilon\Big) \leq C \cdot EX_1 < \infty$$

Beweis: Mittels der Tschebyschev'schen Ungleichung erhält man für eine von $\varepsilon$ abhängende Konstante $C_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\frac{|\tilde{S}_{k_n} - E\tilde{S}_{k_n}|}{k_n} \geq \varepsilon\Big) \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2\tilde{S}_{k_n}}{k_n^2} \ = \ C_1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} D^2 Y_i. \tag{10.5}$$

(An dieser Stelle wurde benutzt, dass die $(X_n)$ und folglich auch die $(Y_n)$ paarweise unabhängig sind. Die paarweise Unkorreliertheit der $(X_n)$ würde noch nicht die der $(Y_n)$ nach sich ziehen.)
Die rechte Seite von (10.5) wird weiter vergrößert:

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} D^2 Y_i \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} E(Y_i^2) =$$
$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[1,k_n]}(i) \frac{E(Y_i^2)}{k_n^2} =$$
$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \sum_{n:k_n \geq i} \frac{1}{k_n^2}\Big) E(Y_i^2) = C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \Big( \sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{1}{k_n^2}\Big) E(Y_i^2) \tag{10.6}$$

Nun ist aber:

$$\sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} = \frac{1}{i^2}\Big[\frac{i^2}{[\alpha^{n_i}]^2} + \frac{i^2}{[\alpha^{n_i+1}]^2} + \dots\Big] \leq$$

$$\leq \frac{1}{i^2}\Big[\frac{i^2}{(\alpha^{n_i}-1)^2} + \frac{i^2}{(\alpha^{n_i+1}-1)^2} + \frac{i^2}{(\alpha^{n_i+2}-1)^2} + \dots\Big] =$$

$$\frac{1}{i^2}\Big[\frac{1}{(\frac{\alpha^{n_i}}{i}-\frac{1}{i})^2} + \frac{1}{(\frac{\alpha^{n_i+1}}{i}-\frac{1}{i})^2} \dots\Big] \leq$$

$$\frac{1}{i^2}\Big[\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(\alpha-\frac{1}{2})^2} + \dots\Big] = \frac{C_2}{i^2} \qquad i \geq 2,$$

für eine Konstante $C_2$, die von $\alpha$ abhängt. Dabei wurde (10.4), nämlich $\alpha^{n_i} \geq i$, benutzt.

Wir nutzen diese Zwischenrechnung zur Fortsetzung der Ungleichung (10.6) und vergrößern deren rechte Seite durch ($C_3 := C_1 \cdot C_2$)

$$\leq C_3 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{EY_i^2}{i^2} = C_3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^{i-1} \int\limits_{[k,k+1)} x^2 dP^{X_1}. \tag{10.7}$$

(In der letzten Gleichung wurde benutzt, dass alle $X_n$ identisch wie $X_1$ verteilt sind und dass gilt

$$E(Y_i^2) = EX_i^2 \cdot \mathbb{1}_{\{X_i<i\}} = EX_1^2 \mathbb{1}_{\{X_1<i\}} =$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} E(X_1^2 \cdot \mathbb{1}_{\{k \leq X_1 < k+1\}}) = \sum_{k=0}^{i-1} \int\limits_{[k,k+1)} x^2 P^{X_1}(dx).$$

Die rechte Seite von (10.7) ist gleich folgendem Wert, den wir wiederum nach oben abschätzen:

$$C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \Big) \int\limits_{[k,k+1)} x^2 P^{X_1}(dx) \leq$$

$$C_4 \sum k = 0 \frac{1}{k+1} \int\limits_{[k,k+1)} x^2 P^{X_1}(dx) \leq C_4 \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{[k,k+1)} x P^{X_1}(dx) =$$

$C_4 E X_1 < \infty$.

Hier wurde benutzt:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \dots = \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{k+1}.$$

Damit ist Lemma 10.10 bewiesen.

3. Aus dem eben bewiesenen Lemma folgt auf Grund des ersten Lemmas von Borel-Cantelli

$$\Big( \frac{|\tilde{S}_{k_n} - E\tilde{S}_{k_n}|}{k_n} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0.$$

(hier tritt zum ersten Mal eine Eigenschaft $P-$fast sicher auf.)
Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{S}_{k_n} - E\tilde{S}_{k_n}}{k_n} = 0 \quad P - \text{f.s.} \tag{10.8}$$

4. Jetzt zeigen wir: Die $\frac{\tilde{S}_{k_n}}{k_n}$ konvergieren fast sicher für $n \to \infty$.

Wegen

$$EY_n = \int\limits_{[0,n)} x dP^{X_1} \uparrow EX_1, \text{ gilt folglich}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n EY_n = EX_1 \text{ und damit } \lim_{n\to\infty} \frac{E\tilde{S}_{k_n}}{k_n} = EX_1.$$

Das bedeutet mit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{S}_{k_n}}{k_n} = EX_1 \quad P - \text{fast sicher.}$$

5. Die $\frac{S_{k_n}}{k_n}$ konvergieren fast sicher: (Wir benutzen wieder, dass alle $X_n$ dieselbe Verteilung wie $X_1$ haben.)

   Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \neq X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{[n,\infty)} xP^{X_1}(dx) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \int\limits_{[k,k+1)} P^{X_1}(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{[k,k+1)} P^{X_1}(dx) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \int\limits_{[k,k+1)} P^{X_1}(dx) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[k,k+1)} xP^{X_1}(dx) \leq EX_1 < \infty$$

   folgt wiederum aus dem 1. Lemma von Borel-Cantelli:

$$P\{X_n \neq Y_n \text{ für unendlich viele } n\} = 0.$$

   Das bedeutet aber wegen $k_n \uparrow \infty$, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_n}}{k_n} = EX_1 \quad P - \text{f.s.}$$

6. Die $\frac{S_n}{n}$ konvergieren fast sicher:
Jedes $n \geq 1$ liegt zwischen zwei der $k_m$.
Es sei $m = m(n)$ derart, dass $k_{m(n)} \leq n < k_{m(n)+1}$.
Offenbar gilt $m(n) \to \infty$ für $n \to \infty$.
Weil $n \to S_n = \sum\limits_1^n X_k$ eine nichtfallende Folge ist, gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_{k_{m(n)}}}{k_{m(n)}} \cdot \frac{k_{m(n)}}{k_{m(n)+1}} \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_{m(n)}}}{k_{m(n)}} = \frac{1}{\alpha} EX_1 \end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt:

$$\frac{k_{m(n)}}{k_{m(n)+1}} = \frac{[\alpha^{m(n)}]}{[\alpha^{m(n)+1}]} = \frac{\alpha^{m(n)} - (\alpha^{m(n)} - [\alpha^{m(n)}])}{\alpha^{m(n)+1} - (\alpha^{m(n)+1} - [\alpha^{m(n)+1}])} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\left(1 - \frac{(\alpha^{m(n)} - [\alpha^{m(n)}])}{\alpha^{m(n)}}\right)}{1 - \frac{(\alpha^{m(n)+1} - [\alpha^{m(n)+1}])}{\alpha \cdot \alpha^{m(n)}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{da } \frac{x - [x]}{x} \leq \frac{1}{x} \xrightarrow[x\uparrow\infty]{} 0.$$

Analog zeigt man:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \alpha EX_1 \qquad P-\text{f.s}$$

Da $\alpha > 1$ beliebig gewählt war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1 \qquad P-\text{f.s.}$$

Damit ist a) bewiesen.

b) Es sei $E|X_1| = \infty$. Angenommen, es gilt nicht, dass $(M_n)$ $P$-fast sicher gegen keinen endlichen Grenzwert konvergiert, dann haben wir:

$$P(\underbrace{(M_n) \text{ konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert}}_{=:A}) > 0.$$

Da das Ereignis $A$ zur Tail-$\sigma$-Algebra $\tau = \bigcap_n \bigvee_{k \geq n} \sigma(X_k)$ gehört, folgt aus dem Kolmogorov'schen $0-1-$Gesetz $P(M_\infty) = 1$, wobei $M_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} M_n(\omega), \omega \in A$, gesetzt wurde. Hier wird benutzt, dass die $X_n, n \geq 1$, nicht nur paarweise, sondern insgesamt voneinander unabhängig sind. Also haben wir

$$\lim_{n\to\infty} M_n =: M_\infty \;\; P-\text{f.s. mit } P(|M_\infty| < \infty) = 1.$$

Daraus folgt $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \to 0$.

Also hat das Ereignis $\left\{\frac{|n|}{n} \geq 1 \text{ unendlich oft}\right\}$ die Wahrscheinlichkeit 0. Aus dem 2. Lemma von Borel-Cantelli folgt $\sum P(\frac{|X_n|}{n} \geq 1) < \infty$. Wegen $\infty = E|X_1| = \sum_{k=0}^{\infty} P(|X_1| \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(|X_k| \geq k)$ dies ist ein Widerspruch.

c) Es sei $C > 0$ beliebig. Mit

$S_n^C := \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{X_k \geq C\}}$ gilt $EX_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq C\}} < \infty$ und die $(X_n^C)$ sind unabhängig.
Es ist

$$\liminf \frac{S_n}{n} \geq \liminf \frac{S_n^C}{n} = EX_1^C \uparrow \infty \,\text{für}\, C \uparrow \infty.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty. \qquad P-\text{f.s.}$$

Damit ist das starke Gesetz der großen Zahlen bewiesen. □

## 10.4 Anwendungen des starken Gesetzes der großen Zahlen

### 10.4.1 Die Monte-Carlo-Methode

Es seien $(X_n, n \geq 1)$ und $(Y_n, n \geq 1)$ zwei Folgen von Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, die alle dieselbe Verteilung besitzen, und zwar die gleichmäßige Verteilung auf $([0,1), \mathscr{B}_{[0,1)})$.
Außerdem seien alle $X_n, Y_m, n, m \geq 1$, voneinander unabhängig. Folglich ist $(X_n, Y_n), n \geq 1$, eine Folge unabhängiger, gleichmäßig auf $([0,1)^2, \mathscr{B}_{[0,1)^2})$ verteilter zweidimensionaler zufälliger Vektoren.

Es sei $B$ eine Borelmenge aus $[0,1)^2$ mit $p := \lambda_2(B) \in (0,1)$.

Dann bildet $(Z_n, n \geq 1)$ mit

$Z_n := \mathbb{1}_B(X_n, Y_n), \quad n \geq 1$

ein Bernoullischema mit dem Parameter $p$. Offenbar gilt $p = EZ_1$.

Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k = EZ_1 \quad P-\text{fast sicher.}$$

Man kann also den Flächeninhalt $\lambda_2(B)$ der Menge $B$ näherungsweise bestimmen, indem man das Bernoullischema $(Z_n, n \geq 1)$ sehr oft, sagen wir $n$-mal, ausführt (d. h., indem man nacheinander und unabhängig voneinander Punkte aus $[0,1)^2$ rein zufällig auswählt) und die relative Häufigkeit bestimmt, mit der die Punkte $Z_k, k = 1, \ldots,$ in $B$ fallen.

Beispiel: $B = \{(x,y) \in [0,1)^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, p = \lambda_2(B) = \frac{\pi}{4}$.

### 10.4.2 "Normale Zahlen" aus $[0,1)$

Es seien $\Omega = [0,1), \mathfrak{A} = \mathscr{B}_{[0,1)}$ und $P = \lambda_{[0,1)}$ (Lebesguemaß auf $[0,1)$). Jedes $\omega \in \Omega$ hat genau eine dyadische Darstellung

$$\omega = 0, \omega_1, \omega_2 \dots \qquad \text{mit} \quad \omega_i \in \{0,1\}, i \geq 1,$$

in der $\omega_i = 0$ unendlich oft vorkommt.

Wir setzen

$$X_n(\omega) := \omega_n \ , \ n \geq 1, \omega \in \Omega.$$

**Lemma 10.11** *$(X_n, n \geq 1)$ bildet ein Bernoullischema mit dem Parameter $p = \frac{1}{2}$.*

Beweis: Es gilt $P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) =$

$$P\Big(\{\omega : \sum_{k=0}^{n} \frac{i_k}{2^k} \leq \omega < \sum_{k=0}^{n} \frac{i_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}\}\Big) = \frac{1}{2^n}.$$

Insbesondere ist $P(X_k = i_k) = \frac{1}{2}; k \geq 1$.

Also sind die $(X_n, n \geq 1)$ voneinander unabhängig und identisch verteilt mit $P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = \frac{1}{2}, n \geq 1$.

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k = \frac{1}{2} \quad \lambda_{[0,1)} - \text{ fast sicher.}$$

**Definition 10.12** *Eine reelle Zahl $x$ aus $[0,1)$ heißt normal, falls in ihrer Dualdarstellung $x = 0, i_1, i_2, \dots$ mit unendlich vielen Nullen gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} i_k = \frac{1}{2}.$$

Das starke Gesetz der großen Zahlen impliziert also, dass Lebesgue-fast alle Zahlen aus $[0,1)$ normal sind. Die dyadischen Zahlen $k.2^{-n} (0 \leq k < 2^n, n \geq 1)$ sind nicht normal, da für sie $i_k = 0$ für alle hinreichend große $k$ gilt. Es ist unbekannt, ob $\sqrt{2}, \log 2, \mathrm{e}, \pi$ normal sind.

An diesem Beispiel wird deutlich, dass die Konvergenz im starken Gesetz der großen Zahlen tatsächlich nicht für alle $\omega \in \Omega$, sondern nur für alle Punkte $\omega$ außerhalb einer $P$-Nullmenge vorzuliegen braucht.

# Index


Ausgeartete Verteilung
  charakteristische Funktion, 205

Binomialverteilung
  charakteristische Funktion, 205

Cauchyverteilung
  charakteristische Funktion, 205
charakteristische Funktion, 203
  Eindeutigkeitssatz, 209
  Faltungssatz, 210
  Stetigkeitssatz, 210
  Umkehrformel, 209

Eindeutigkeitssatz, *siehe* charakteristische Funktion

Faltungssatz, *siehe* charakteristische Funktion

Gammaverteilung
  charakteristische Funktion, 205

negative Binomialverteilung
  charakteristische Funktion, 205
Normalverteilung
  charakteristische Funktion, 205

Poissonverteilung
  charakteristische Funktion, 205

Stetigkeitssatz, *siehe* charakteristische Funktion

Umkehrformel, *siehe* charakteristische Funktion