Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

1. Übung, 23. 04. 2007

1. Es seien $\sigma^2 > 0$ ein bekannter und $\mu \in R_1$ ein unbekannter Parameter. Man berechne die log-Likelihoodfunktion der Brownschen Bewegung

$$B_t = \sigma W_t + \mu t, \vartheta = \mu \in R_1, t \leq T,$$

wobei $(W_t, t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozess sei.

2. n Maschinen fallen unabhängig voneinander mit derselben Verteilung $\mathrm{Exp}(\vartheta)$ aus. r Maschinen seien zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots t_r$ ausgefallen. Wie lautet die Maximum-Likelihood Schätzung $\hat{\vartheta}_r$ für ϑ?

3. Es sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit F als Verteilungsfunktion. Man zeige:

   a) Die Menge
   $I_F := \{u \in R_1 | \int\limits_{R_1} \exp(ux)F(dx) < \infty\}$
   ist ein Intervall, das die Null enthält.

   b) Ist $0 \in \overset{o}{I}_F$ so ist die Funktion
   $\psi_F(u) := ln \int\limits_{R_1} \exp(ux)F(dx)$
   auf $\overset{o}{I}_F$ unendlich oft differenzierbar mit $\psi'(0) = EX$ und $\psi''(0) = D^2X$.
   ψ_F heißt Kumulantenfunktion der Verteilungsfunktion F.

c) Durch

$$F_u(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \exp[ux - \psi_F(u)]dF(x)$$

ist eine Familie $(F_u | u \in I_F)$ von Verteilungsfunktionen definiert, die sogenannte von F erzeugte Exponentialfamilie.

d) Man berechne Erwartungswert und Streuung von X bezüglich F_u.

e) Man gebe die von folgenden Verteilungsfunktionen erzeugten Exponentialfamilien an:
$\mathrm{Exp}(\lambda)$, Poisson $(\lambda), \Gamma(\alpha, \lambda), \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$