Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

2. Übung, 07. 05. 2007

1. Die Gammafunktion $t \to \Gamma(t)$ ist für $t > 0$ definiert durch

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty x^{t-1} \mathrm{e}^{-x} dx$$

.

   a) Man zeige, dass gilt

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad t > 0,$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

2. Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$ ist definiert durch ihre Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in R.$$

Berechnen Sie die kumulantenerzeugende Funktion

$$\varphi(u) = ln \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{ux} f(x) dx, \quad u < \lambda$$

der $\Gamma(\alpha, \lambda)$-Verteilung und damit die n-te Kumulante κ_n.

3. Es seien $(N(t), t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit dem Parameter $\lambda > 0$ und $(Y_n, n \geq 1)$ eine Folge reellwertiger, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit der Verteilungsfunktion F, die außerdem von $(N(t), t \geq 0)$ unabhängig seien.
Durch

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,\ t \geq 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1} Y_k := 0$$

ist ein sogenannter zusammengesetzter Poissonprozess definiert. Man skizziere eine typischen Trajektorienverlauf von $(X(t), t \geq 0)$ und berechne

$$\varphi(u,t) = ln\mathrm{E}\mathrm{e}^{uX(t)}, \quad u \in \{v \in R_1 | \int_{R_1} \mathrm{e}^{vx} F(dx) < \infty\}, t > 0.$$

4. Es sei $(X_n, n \geq 1)$ eine zeitlich homogene Markovsche Kette mit abzählbarem Zustandsraum $\mathrm{E} = \{i, j, \cdots, k, \cdots\}$, den Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij}(\vartheta), i, j \in \mathrm{E}$ und der Anfangsverteilung $(\pi_i(\vartheta), i \in \mathrm{E}), \vartheta \in \Theta \subseteq R_k$.
Man berechne die Likelihoodfunktion

$$L_n(\vartheta; i_0, i_1, \cdots, i_n) = P_\vartheta(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$$

.
Man bestimme eine Maximum-Likelihood-Schätzung für $\mu(\vartheta) := \sum_{j \geq 0} j p_j(\vartheta)$ falls $(X_n, n \geq 1)$ ein Verzweigungsprozess ist mit der Nachkommensverteilung

$$p_j(\vartheta) = \frac{\vartheta^j p_i}{[\varphi(\vartheta)]^j}, \quad j \geq 0$$

mit $p_j \geq 0 (j \geq 0), \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ und

$$\vartheta \in \Theta := \Big\{ \sum_{j \geq 0} \vartheta^j p_j =: \varphi(\vartheta) < \infty \Big\}.$$