Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

3. Übung, 21. 05. 2007

1. Man berechne die kumulantenerzeugende Funktion $\varphi(u)$ der bilateralen Gammaverteilung mit den Parametern $(\alpha^+, \alpha^-, \lambda^+, \lambda^-) \in (0, \infty)^4$ und ermittle die Kumulanten $\kappa_n, n \geq 1$.

2. Es sei $(X_1, \cdots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer $U([0, \Theta])$-verteilten Grundgesamtheit, $\Theta > 0$.

   a) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion und eine Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\Theta}_1$ von Θ.

   b) Zeigen Sie, dass $\hat{\Theta}_1$ nicht erwartungstreu ist. Bestimmen Sie eine Konstante $c > 0$, so dass $\hat{\Theta}_2 := c\hat{\Theta}_1$ erwartungstreu ist.

   c) Vergleichen Sie die Schätzungen $\hat{\Theta}$ und $\hat{\Theta}_2$ an Hand ihres mittleren quadratischen Fehlers $\mathbb{E}_0[(\hat{\Theta}_i - \Theta)^2], i = 1, 2$.

   d) Entwerfen Sie eine weitere plausible Schätzung $\hat{\Theta}_3$ und bestimmen Sie ihren mittleren quadratischen Fehler.

3. Der Satz von Radon-Nikodym sagt aus, dass für zwei (σ-endliche) Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf einem Messraum $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ (d.h. für $A \in \mathscr{F}$ gilt: $\mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$) eine $\mathscr{F}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \forall A \in \mathscr{F}.$$

   Zwei Funktionen f und $\tilde{f}$ mit dieser Eigenschaft stimmen $\mathbb{P}$-fast sicher überein. Man nennt jede dieser Funktionen Radon-Nikodym-Ableitung und bezeichnet sie mit $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

a) Weisen Sie im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ nach, dass $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ eine $\mathbb{P}$-fast sicher nicht-negative Funktion ist mit

$$\int_\Omega \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega)\mathbb{P}(dw) = 1.$$

b) Welche zusätzliche Eigenschaft hat $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, falls auch $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ gilt?

c) Beweisen Sie für drei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{P}_3 \ll \mathbb{P}_2$ und $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}_1$, dass $\mathbb{P}_3 \ll \mathbb{P}_1$ gilt und die Radon-Nikodym-Ableitungen folgende "Kettenregel" erfüllen

$$\frac{d\mathbb{P}_3}{d\mathbb{P}_2}\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1} = \frac{d\mathbb{P}_3}{d\mathbb{P}_1} \ \mathbb{P}_1 - \text{f.s.}$$

Was folgt speziell im Fall $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_1$?
Hinweis: Es genügt, für nicht-negative messbare Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mittels Approximation durch Treppenfunktionen zu zeigen

$$\int g(\omega)\mathbb{P}_2(d\omega) = \int g(\omega)\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}(\omega)\mathbb{P}_1(d\omega).$$

4. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sei eine Filtration $(\mathscr{F}_n)$ gegeben.

a) Ist $\mathbb{Q}$ ein weiterer Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega \ll \mathbb{P}$, so gilt für die Einschränkungen $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $L_n := \frac{d\mathbb{Q}|\mathscr{F}_n}{d\mathbb{P}|\mathscr{F}_n}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal bezüglich $(\mathscr{F}_n)$ ist mit $L_n = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathscr{F}_n\right]$.

b) Überprüfen Sie, dass $(L_n, \mathscr{F}_n)$ bereits ein $\mathbb{P}$-Martingal ist, sofern $\mathbb{Q}|\mathscr{F}_n \ll \mathbb{P}|\mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie unter diesen Voraussetzungen, dass (L_n) bezüglich $\mathbb{P}$ fast sicher gegen eine nicht-negative Zufallsgröße L_∞ konvergiert mit $\mathbb{E}_\mathbb{P}[L_\infty] \leq 1$.

c) Betrachten Sie ein unendlich langes Münzwurfexperiment, wobei unter $\mathbb{P}$ mit einer fairen Münze und unter $\mathbb{Q}$ mit einer Münze, die stets Zahl zeigt, gearbeitet wird. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$ gilt, für die Filtration $\mathscr{F}_n$, erzeugt, durch die ersten n-Würfe, dass jedoch L_∞ $\mathbb{P}$-fast sicher gleich Null ist und nicht $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ gilt.