Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

4. Übung, 04. 06. 2007

1. Es sei $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer auf $[\vartheta, \vartheta + 1]$ gleichmäßig verteilten Grundgesamtheit. Man berechne die Likelihoodfunktion. Was kann man über Maximum-Likelihood-Schätzer in diesem Fall feststellen?

2. Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer nach $f_\vartheta(\cdot)$-verteilten Grundgesamtheit, wobei f_ϑ definiert ist als Dichte

$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x \in R_1$$

$$\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in R_1 \times (0, \infty).$$

Man zeige, dass die Likelihoodfunktion kein endliches Maximum besitzt.

3. Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer auf $[0, \vartheta]$ gleichmäßig verteilten Grundgesamtheit. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ für ϑ nicht zulässig ist.

4. Es seien $X_n, n \geq 1$, reelle Zufallsgsgrößen über $(\Omega, \mathscr{F})$ und P, Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{F}$. Die Zufallsgrößen X_n mögen sowohl bez. P als auch bez. Q unabhängig voneinander sein und die Verteilungen F_n bzw. G_n besitzen. Es gelte

$$F_n \ll G_n, f_n := \frac{dF_n}{dG_n}, n \geq 1.$$

Setzt man $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n), \mathscr{F}_\infty := \vee_n \mathscr{F}_n$, so gelten mit $P_n = P|_{\mathscr{F}_n}, Q_n = Q|_{\mathscr{F}_n}$ die Beziehungen $P_n \ll Q_n$, $n \geq 1$ und

$$L_n(\omega; P, Q) = \frac{dP_n}{dQ_n} = \prod_1^n f_k(X_k(\omega)) \cdot Q - f.s.$$

(Beweis!)

Es sei

$$\begin{aligned} g_n &:= L_n^{\frac{1}{2}} \quad n \geq 1 \text{ und} \\ \varrho_n &:= E_Q g_n. \end{aligned}$$

Man überzeuge sich davon, dass $\varrho_n \in (0, 1]$ und $\varrho_{n+1} \leq \varrho_n$ für $n \geq 1$ gilt.

Es sei $\varrho := \lim_{n\to\infty} \varrho_n$.

Man zeige:
Entweder sind die Maße P und Q singulär zueinander oder P ist absolutstetig zu Q. Der erste Fall liegt vor, falls $\varrho = 0$, der zweite, falls $\varrho > 0$ gilt.

Hinweis: Man nutze, dass $\sqrt{L_n}$ ein nichtnegatives Supermartingal ist, das gleichmäßig ist, das gleichmäßig integrierbar ist (Beweis!) um für $\varrho = 0$ zu zeigen, dass $L_n \to 0(Q - f.s.)$ gilt. Für $\varrho > 0$ ist (g_n) eine Cauchyfolge in $L_2(Q)$ (Beweis!). Also konvergiert g_n gegen eine Zufallsgröße g_∞ mit $E_Q g_\infty^2 = 1$. Daraus folgt $P \ll Q$ und $\frac{dP}{dQ} = g_\infty$.