Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

5. Übung, 18. 06. 2007

1. Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $P \ll Q$. Die Kullback-Information von P über Q ist definiert durch

$$K(P,Q) = \mathrm{E}_P\Big[ln \frac{dP}{dQ}\Big].$$

a) Es sei $\mathfrak{A}_o$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Man zeige

$$K(P|_{\mathfrak{A}_0}, Q|_{\mathfrak{A}_0}) \ll K(P,Q)$$

Hinweis: Für jede konvexe Funktion Φ gilt die Jensensche Ungleichung

$$\mathrm{E}_Q\Big(\Phi(\frac{dP}{dQ})|\mathfrak{A}_0\Big) \geq \Phi\Big(\mathrm{E}_Q(\frac{dP}{dQ}|\mathfrak{A}_0)\Big) \qquad Q - f.s.$$

Man wende diese Ungleichung auf die streng konvexe Funktion

$$\Phi(x) := x(ln\, x) + 1 - x, \quad x > 0$$

an und beachte $K(P,Q) = \mathrm{E}_Q\Phi(\frac{dP}{dQ})$.

b) Sind P_1, P_2, Q_1, Q_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $P_i \ll Q_i, i = 1, 2$, so beweise man

$$K(P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2) = K(P_1, Q_1) - K(P_2, Q_2)$$

c) Man berechne $K(F_1, F_2)$ für $(F_i)_{i=1,2}$ mit

$$F_i = N(\mu_i, \sigma^2), \sigma^2 > 0 \quad \text{bekannt}$$

$$F_i = N(m, \sigma_i^2), m \in R \quad \text{bekannt}$$

$$F_i = N(m_i, \sigma_i^2), m_i \in R, \sigma_i^2 > 0$$

$$F_i = Bin\,(1, p_i), p_i \in (0,1)$$

$$F_i = \text{Poiss}(\lambda_i), \quad \lambda_i > 0$$

d) Es sei (X, Y) ein zentrierter Gaußscher Vektor mit dem Korrelationskoeffizienten ϱ. Die gemeinsame Verteilungsfunktion sei $F_{X,Y}$, die Randverteilungsfunktionen seien F_X bzw. F_Y. Man zeige:

$$K(F_{X,Y}, F_X \otimes F_Y) = -\frac{1}{2} ln(1 - \rho^2)$$

$$K(F_{X,Y}), F_X \otimes F_X) + K(F_X \otimes F_Y, F_{X,Y}) = \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}$$

2. Es seien P_{μ,σ^2} und P_{μ_0}, σ_0^2 die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zweier Wienscher Prozesse in den Zeitpunkten $t_0, t_1, \ldots, t_m$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots, t_m = T$, die die Parameter μ, σ^2 bzw. μ_0, σ_0^2 besitzen. Man berechne den Likelihoodquotienten

$$\frac{dP_{\mu,\sigma^2}}{dP_{\mu_0,\sigma_0^2}}(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$