Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

10. Zusatzübung

1) Es sei $(X_n : n \geq 1)$ eine Folge von unabhängigen und zum Parameter 1 Cauchyverteilten Zufallsgrößen, d. h. X_1 besitzt die Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass die Folge $Y_n := \frac{1}{n}\max\{X_1, \dots, X_n\}, n \in \mathbb{N}_1$, in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzverteilung.

   b) Was können Sie über die Verteilung von $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ sagen?

2) Es sei $(X, Y)^T$ ein normalverteilter zufälliger Vektor mit den Parametern

$$\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0 \text{ und } \rho \in (-1, 1).$$

Man bestimme alle Winkel $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ als Funktion der Parameter σ_X, σ_Y und ρ, so dass die Zufallsgrößen U und V, definiert durch

$$U = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \quad V = X\sin\alpha - Y\cos\alpha,$$

unkorreliert sind. Sind sie in diesem Fall auch unabhängig?

3) a) Es seien $X_1, \dots X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass $X_1^2 + \dots + X_n^2$ eine $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$-verteilte Zufallsgröße ist. Eine Gamma-Verteilung mit diesen Parametern bezeichnet man auch als χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

b) Speziell für $n = 2$ ist also $X_1^2 + X_2^2$ exponentialverteilt zum Parameter $\frac{1}{2}$. Beweise die folgende Umkehrung dieser Aussage:
Sei U gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$, und sei Z exponentialverteilt mit Parameter 1 und unabhängig von U. Dann sind

$$X = \sqrt{2Z}\cos U \quad \text{und} \quad Y = \sqrt{2Z}\sin U$$

unabhängig und $\mathscr{N}(0,1)$-verteilt sind.