Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

5. Zusatzübung

1) Es sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R_n$ und $p = (p_1, \ldots, p_n)^T \in R_n^+$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

   Ist f eine konvexe Funktion auf einem Intervall (a, b) mit $x_k \in (a, b)$, $k = 1, \ldots, n$, so gilt

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k). \qquad (*)$$

   Man beweise $(*)$.

2) Es sei Ω eine abzählbare Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Durch

$$H(P) := -\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) ln P(\{\omega\})$$

   ist die sogenannte Entropie von P definiert.

   a) Man zeige, dass $H(P) \geq 0$ gilt. Wann gilt $H(P) = 0$?
   b) Es sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ und Q die gleichmäßige Verteilung auf Ω. Man zeige, dass für jede andere Verteilung P auf Ω gilt $H(P) < H(Q)$.

3) Es seien $n \geq 1$ und $p \in (0, 1)$. Die Zufallsgröße S_n besitze eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

a) Man zeige, dass für alle $a > 0$ gilt

$$P\left(|\frac{S_n}{n} - p| \geq a \right) \leq \frac{1}{4na^2}$$

b) Es sei f eine stetige Funktion von $[0,1]$ in R_1. Man zeige, dass die Funktion $f_n(p) := \mathrm{E}f(\frac{S_n}{n})$ erweitert durch $f_n(0) = f(0), f_n(1) = f(1)$ für jedes n ein Polynom in p ist. Beweisen Sie, dass (f_n) gleichmäßig bez. $p \in [0,1]$ gegen f konvergiert (Weierstraßsches Approximationstheorem).