Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

9. Zusatzübung

1) (Spezialfall des Satzes von Radon-Nikodym)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine integrierbare Zufallsgröße über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\mathscr{H}$ eine endliche Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Man zeige:

   a) Es gibt ein $n \geq 1$ und eine Zerlegung $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ von Ω in $\mathfrak{A}$-meßbare Teilmengen, so dass

   $$\mathscr{H} = \Big\{ \bigcup_{i \in I} H_i | I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \Big\}$$

   (I durchläuft alle Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$.)

   b) Man zeige: Es gibt eine $\mathscr{H}$-meßbare Zufallsgröße Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

   $$\int_H Y dP = \int_H X dP, \ H \in \mathscr{H},$$

   und konstruiere Y.

   c) Die Zufallsgröße Y nennt man bedingte Erwartung von X unter der Hypthese $\mathscr{H}$. Können Sie diese Bezeichnung begründen? (Bezeichung: $Y = E(X|\mathscr{H})$)
   Was ergibt sich für $\mathscr{H} = \{\emptyset, \Omega\}$?

2) Zwei Zufallsgrößen X und Y mögen folgende Eigenschaften besitzen:

   a) X und Y sind unabhängig und haben differenzierbare Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

b) Die gemeinsame Dichte $f(x, y) = f_X(x) f_y(y)$ hängt von (x, y) nur durch $x^2 + y^2$ ab:

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2) \text{ für eine Funktion } g \tag{$*$}$$

zeigen Sie, dass dann X und Y beide normalverteilt mit Erwartungswert Null und einer gleichen Streuung σ^2 sind.

Hinweis: Differenzieren Sie $(*)$ nach x und berechnen Sie $\frac{f'_X(s)}{2x f_X(x)}$. Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck nicht von x abhängt und lösen Sie die daraus entstehende Differenzialgleichung. Nutzen Sie die Eigenschaft, dass f_X eine Dichte ist, um Konstanten zu bestimmen. Analog verfahren Sie mit f_Y.