Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 7. Zusatzübung

1) Ab welcher Zahl von Würfen zweier regulärer Spielwürfel ist es günstig, auf mindestens eine Doppelsechs zu wetten?
Lösung: Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit beim n-maligen Wurf zweier Würfel keine Doppelsechs zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit beim einmaligen Wurf zweier Würfel keine Doppelsechs zu werfen ist $\frac{35}{36}$. Da die Würfe unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit bei n Würfen keine Doppelsechs zu werfen $\left(\frac{35}{36}\right)^n$. Gesucht ist also das kleinste n mit $\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$ bzw $n \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\frac{1}{2}$ bzw $n > \ln\frac{1}{2}/\ln\left(\frac{35}{36}\right) \approx 24,6$.
Die gesuchte Anzahl ist 25.

2) Um in der Spielshow "Randotime"den Hauptpreis zu gewinnen, erhält ein Kandidat zwei Schachteln sowie 100 weiße und 100 schwarze Kugeln. Er darf die Kugeln nach Belieben auf beide Schachteln verteilen, wobei nur keine Schachtel leer bleiben darf. Danach wählt er "blind" eine Schachtel aus und zieht daraus rein zufällig eine Kugel. Er erhält den Hauptpreis, falls die gezogene Kugel weiß ist. Wie sollte der Kandidat die Verteilung der Kugeln vornehmen, um die Gewinnwahrscheinlichkeiten zu maximieren, und wie groß ist diese dann?
Lösung: Nehmen wir an, der Kandidat legt in Schachtel 1 insgesamt c Kugeln, $0 < c \leq 100$, (für größeres c tauschen wir die Rolle der zwei Schachteln) von denen w, $0 \leq w \leq c$, weiß sind. In Schachtel 2 liegen dann $200 - c$ Kugeln, von denen $100 - w$ weiß sind. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen ergibt sich dann zu

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{100 - w}{200 - c} = \frac{(200 - 2c)w + 100c}{2c(200 - c)}.$$

Für festes c ist dies genau für maximales $w(c) = c$ maximal. Es bleibt nach dem Maximum von $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{100-c}{200-c}$ zu suchen, was bei kleinstmöglichem $c = 1$ gefunden wird.
Der Kandidat sollte also in eine Schachtel eine weiße Kugel legen und alle anderen Kugeln in die andere Schachtel. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist dann $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{99}{199}$.

3) Eine Münze mit $P(\text{Wappen}) = p$ wird unbegrenzt oft geworfen. Es sei A_k das Ereignis, dass k mal hintereinander das Wappen erscheint, und zwar bei den Würfen mit den Nummern $2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$.
Man zeige, dass $P(A_k \text{ trifft für unendlich viele } k \text{ ein}) = 1$ gilt, falls $p \geq \frac{1}{2}$ ist und $P(A_k \text{ trifft für unendlich viel } k \text{ ein}) = 0$, falls $p < \frac{1}{2}$.

Lösung:
Es bezeichne $B_{k,j}$ das Ereignis, dass bei allen Würfen mit den Nummern $j-k+1, \dots, j$ Wappen erscheint. Es gilt $P(B_{k,j}) = p^k$.
Es gibt 2^k Würfe mit den Nummern $2^k, 2^k+1, \dots, 2^{k+1}-1$.

Nun arbeiten wir mit Abschätzungen von $P(A_k)$ nach oben und nach unten. Sei zunächst $p < \frac{1}{2}, \quad 2p = \alpha < 1$

$$P(A_k) \le P(\bigcup_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} B_{k,j}) \le 2^k \cdot p^k = \alpha^k$$

Damit folgt $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} < \infty$ und mit dem 1. Lemma von Borel-Cantelli folgt

$$P(A_k \text{trifft für unendlich viele } k \text{ ein}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} A_k) = 0\,.$$

Sei nun $p \ge \frac{1}{2}$. Hier wollen wir das 2. Lemma von Borel-Cantelli anwenden und schätzen dazu A_k durch eine Menge unabhängiger Ereignisse nach unten ab. Wir teilen die Wurfnummern in nichtüberlappende Gruppen zu je k Nummern: $2^k+i\cdot k, \dots, 2^k+i\cdot k+(k-1)$, für $i = 0, 1, , \dots [2^k/k]-1$. Die Ereignisse $B_{k,2^k+i\cdot k+(k-1)}$, $i = 0, 1, , \dots [2^k/k]-1$ sind voneinander unabhängig, in A_k enthalten, jedoch nicht disjunkt.

$$\begin{aligned}
A_k &\supseteq \bigcup_{i=0}^{[2^k/k]-1} B_{k,2^k+i\cdot k+(k-1)} \\
P(A_k) &\ge P\Big(\bigcup_{i=0}^{[2^k/k]-1} B_{k,2^k+i\cdot k+(k-1)}\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{i=0}^{[2^k/k]-1} \overline{B}_{k,2^k+i\cdot k+(k-1)}\Big) \\
&= 1 - \underbrace{(1-p^k)}_{\le e^{-p^k}}{}^{[2^k/k]} \ge 1 - e^{-p^k[2^k/k]} \ge 1 - e^{-p^k 2^k/k} \ge 1 - e^{-1/k} \\
&\ge 1/(k+1) \quad \text{für hinreichend große } k.
\end{aligned}$$

Damit folgt $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \infty$, weiterhin sind die Ereignisse A_k voneinander unabhängig und mit dem 2. Lemma von Borel-Cantelli folgt die Behauptung.